4 Higidura zirkularrak

Planeten higidurak ia zirkularrak direla esan dezakegu. Esate baterako, Lurraren eta Eguzkiaren arteko distantzia 147-152 milioi kilometro artekoa da, eta zenbait kalkulutan, zirkunferentzia baten antza du (kalkuluen errorea % 2 baino txikiagoa da). Merkuriotik Eguzkirako gutxieneko eta gehienezko distantziak, ordea, 46 eta 70 milioi kilometro dira, hurrenez hurren, eta kasu horretan hurbilketa zirkularra ez da egokia; errorea % 20 baino handiagoa da.

Higidura zirkularra izaten da, higikariaren ibilbidea zirkunferentzia denean.

Higidura zirkularretan higikariaren ibilbidea **zirkunferentzia** izaten da beti (► 9.22. irudia):

- **Posizio-bektoreak** modulu konstantea du eta haren norabidea etengabe aldatzen da.
- **Abiadura-bektorea** zirkunferentziaren ukitzailea da; horregatik aldatzen da etengabe, modulu konstantea izan arren.
- **Azelerazio-bektorea** ez da inoiz zero izaten; abiadura aldakorra da une oro.

Eskuarki **magnitude lineal** deritzen arren, higidura zirkularrak aztertzeko, orain arte erabili ditugun magnitude zinematiko berberak erabil ditzakegu; hau da, posizioa, abiadura eta azelerazioa. Hala ere, higidura horien berezko ezaugarriak direla eta, komenigarria da **magnitude angeluar** deritzen beste magnitude batzuk erabiltzea:

- **Posizio angeluarra, θ.** Neurri-unitatea radianak dira, rad.
- **Abiadura angeluarra, ω.** Neurri-unitatea radian segundoko da, rad/s.
- **Azelerazio angeluarra, α.** Neurri-unitatea radian segundo karratuko da, hau da, rad/s^2.

4.1. Posizio angeluarra

Higikaria non dagoen adierazteko, erreferentzia-sistema zehaztu behar dugu. B posizioa, A posiziotik (higiduraren jatorria) B-ra dagoen θ angeluak adierazten du. Higidura zirkularraren koordenatu angeluar horrek (θ) higidura zuzenaren *x* ordezkatzen du (► 9.23. irudia).

Nazioarteko sisteman **radiana** erabiltzen da angeluak neurtzeko. Haren definizioari erreparatuz gero, radianetan neurtutako θ angelu bat arkuaren luzeraren *(s)* eta erradioaren *(R)* arteko zatidura da (► 9.24. irudia).

$$\theta = \frac{s}{R}$$

θ posizioaren definizio hori abiapuntutzat hartuta, bira oso bat, 360°-ko angelu bat, 2π radianeko angelu bat da.

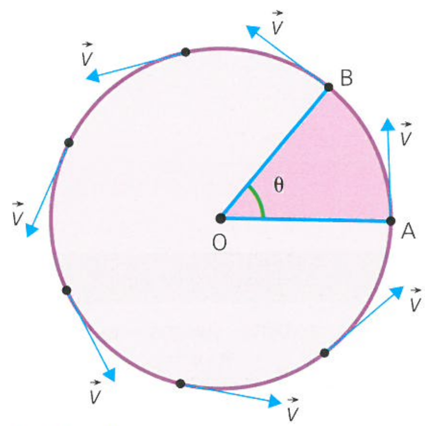
Hori horrela, *s*-ren ordez zirkunferentziaren perimetroa jarriz gero, $2\pi \cdot R$:

$$\theta = \frac{s}{R} = \frac{2\pi \cdot \cancel{R}}{\cancel{R}} = 2\pi \text{ rad}$$

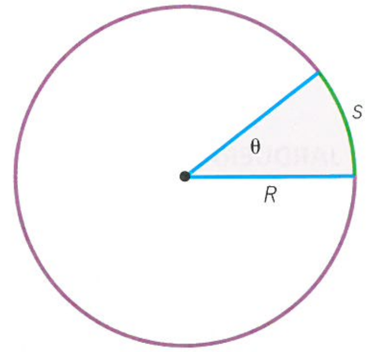
Hau da zirkunferentzian egindako espazioaren *(s)* eta osatutako angeluaren (θ) arteko erlazioa (► 9.24. irudia):

$$\text{arkua} = \text{erradioa} \cdot \text{angelua}$$
$$\boldsymbol{s = R \cdot \theta}$$

9.22. irudia. Bizikletetan higidura zirkularraren zenbait adibide aurki ditzakegu. Gurpilen, engranajeen eta pedalen higidura zirkularra da.



9.23. irudia. Higidura zirkular batean higikariak egindako angeluak posizio-aldaketa adierazten du. Abiadura bektorearen norabidea etengabe aldatzen da, baina beti ibilbidearen ukitzailea izaten da.



9.24. irudia. Arkuaren eta angeluaren arteko erlazioa.

TRESNA MATEMATIKOAK

Deribatua

Aldiuneko abiadura angeluarra kalkulatzeko funtzio deribatu kontzeptua erabil dezakegu:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

θ nola aldatzen den jakinez gero, abiadura angeluarra kalkula dezakegu edozein unetan.

4.2. Abiadura angeluarra

Magnitude hori higidura zirkularrak deskribatzeko erabiltzen da. Abiadura angeluarrak(ω) eta angeluak (θ) duten erlazioa, abiadura linealak (v) eta egindako espazioak (s) duten erlazio bera da.

Abiadura angeluarra denboran zehar posizio angeluarrak izandako deribatua da:

$$\boldsymbol{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}}$$

SI sisteman **radian segundoko** unitateetan neurtzen da, **rad/s.**

Batzuetan, abiadura angeluarra adierazteko beste unitate bat erabiltzen da: **bira minutuko, b/min:**

$$1 \text{ b/min.} = 1 \frac{\cancel{\text{bira}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{ bira}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{ min}}}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s}$$

Unitate horrek, gorputz batek minutuko zenbat bira ematen dituen adierazten du.

ω-ren eta abiadura linealaren moduluaren arteko erlazioa

Abiadura linealaren definizioa hartu behar dugu abiapuntutzat:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

$ds = d\theta \cdot R$ ordezkatzean, honako hau geratzen zaigu:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta \cdot R}{dt} \quad \omega$$

Hau da **abiadura linealaren moduluaren eta abiadura angeluarraren (ω) arteko erlazioa:**

$$\boldsymbol{v = \omega \cdot R}$$

ADIBIDE EBATZIA

13 12 cm-ko erradioa duen disko baten abiadura 450 b/min-ko da. Kalkulatu:

a) Abiadura angeluarra rad/s-tan.

b) Abiadura lineala ertzean, v, eta erdigunetik 3 cm-ra, v', m/s-tan.

a) Hau da abiadura angeluarra:

$$\omega = 450 \frac{\cancel{\text{bira}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{bira}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} = \mathbf{15\pi \frac{rad}{s}}$$

b) R = 12 cm = 0,12 m eta R' = 3 cm = 0,03 izaki, abiadura lineala da:

$$v = \omega \cdot R = 15\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0{,}12 \text{ m} = 1{,}8\pi \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{9\pi}{5} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{5{,}65 \frac{m}{s}}$$

$$v' = \omega \cdot R' = 15\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 0{,}03 \text{ m} = 0{,}45\pi \frac{\text{m}}{\text{s}} = \frac{9\pi}{20} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \mathbf{1{,}41 \frac{m}{s}}$$

JARDUERAK

24. 40 cm-ko erradioa duen diskoa 33 b/min-tan biraka ari da. Kalkulatu:

a) Abiadura rad/s-tan.

b) Abiadura angeluarra rad/s-tan erdigunetik 20 cm-ra.

Emaitza: a) 3,46 rad/s; b) 3,46 rad/s

25. Kalkulatu 75 cm-ko diametroa duen gurpil baten abiadura lineala, 1.000 b/min-tan biraka ari bada.

Emaitza: 39,27 m/s

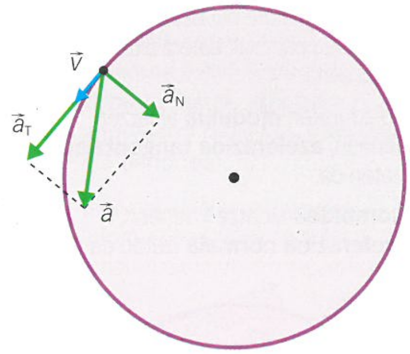
4.3. Azelerazio angeluarra

Azelerazio angeluarrak abiadura angeluarraren (ω) aldaketa neurtzen du.

Azelerazio angeluarra (α) abiadura angeluarraren eta denboraren arteko erlazioaren deribatua da:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

SIn α **rad/s²-tan** neurtzen da.



9.25. irudia. Azelerazio tangentzialaren bektorearen norabidea bat dator abiadura linealaren norabidearekin. Ibilbidearen zuta da.

Azelerazio angeluarraren eta tangentzialaren arteko erlazioa

Azelerazio tangentzialaren definizioa hartuko dugu abiapuntutzat:

$$a_T = \frac{dv}{dt}$$

Aurreko adierazpenean ordezkatzean: $v = \omega \cdot R \Rightarrow a_T = \frac{d\omega \cdot R}{dt} = \alpha \cdot R$.

α

Hau da azelerazio tangentzialaren (a_T) eta angeluarraren (α) arteko erlazioa:

$$a_T = \alpha \cdot R$$

$\vec{a}_T$ bektoreak abiadurak bektorearen norabide bera du; hau da, ibilbidearekiko zutaren norabidea (▸ 9.25. irudia).

Magnitude angeluarren eta linearen arteko erlazioa

Laburbilduz, magnitude linealen baliokideak diren hiru magnitude angeluar berri definitu ditugu, higidura zirkularretarako.

Magnitude angeluarrak	Magnitude linealak	Bien arteko erlazioa
Angelua: θ (rad)	**Posizioa:** s (m)	Arkua = angelua · erradioa $s = \theta \cdot R$
Abiadura angeluarra: ω (rad/s)	**Abiadura lineala:** v (m/s)	Abiadura lineala = angeluarra · erradioa $v = \omega \cdot R$
Azelerazio angeluarra: α (rad/s²)	**Azelerazio tangentziala:** a_T (m/s)	Azelerazio tangentziala = angeluarra · erradioa $a_T = \alpha \cdot R$

JARDUERAK

26. Esan jarraian dituzuen esaldi hauek zuzenak ala okerrak diren:

a) Azelerazio angeluarra rad/s-tan neurtzen da.

b) Zirkunferentziako puntu baten azelerazio tangentziala denbora-unitate bakoitzean egindako angelua neurtuz kalkula daiteke.

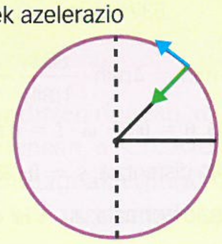
c) Bizikleta baten gurpileko erradio guztiek azelerazio angeluar bera dute.

27. Adierazi ondoko eskeman:

a) Azelerazio normala.

b) Abiadura lineala.

c) Egindako angelua eta erradioa.

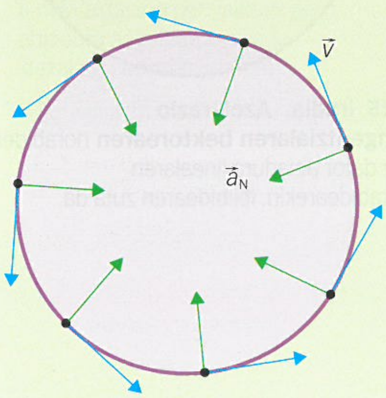


Gogoratu

Abiadura bektore bat da, modulua, norabidea edo biak batera alda ditzakeena.

Abiaduraren **modulua** aldatzen denean, **azelerazioa tangentziala** izaten da.

Norabidea aldatzen denean, **azelerazioa normala** izaten da.



9.26. irudia.

JARDUERA

28. Bi haur zaldiko-maldiko baten plataformarekin bat eginda dauden bi zalditan biraka ari dira. $\omega = 4$ b/min da. Zaldiak, hurrenez hurren, biraketa-ardatzetik 2 eta 3 metrora daudela jakinda, kalkulatu:

a) Abiadura angeluarra rad/s-tan.

b) Haurrek bost minututan zenbat bira eman dituzten.

c) Denbora horretan bakoitzak zenbat metro egin dituen.

d) Bi haurretatik zeinek duen guztizko azelerazio handiena.

Emaitza: a) 0,42 rad/s; b) 20 bira; c) 251 m, 377 m

4.4. Higidura zirkular uniformea, HZRU

Asko dira eredu horri jarraiki higitzen diren gorputzak: pieza mekanikoak (ordularienak, motorrenak, etxetresna elektrikoenak), zaldiko-maldikoak, noriak...

Abiadura angeluar konstantearekin ibilbide zirkularra egiten ari den higikari batek **higidura zirkular uniformea, HZRU,** du.

Hauek dira higidura horren ezaugarriak:

- Baldin eta $\omega = \text{kte.} \Rightarrow v = \omega \cdot R = \text{kte.}$

  Baina abiadura-moduluari ($\vec{v}$) dagokionez soilik da konstantea; ibilbidearekiko zuta denez, haren norabidea etengabe aldatzen baita.

- Baldin eta $\omega = \text{kte.} \Rightarrow \alpha = 0$.

  Horrek esan nahi du, azelerazio normalak zero ez den edozein balio izan arren ($\vec{v}$, balioa aldatu egiten da), azelerazio tangentziala zero dela (▸ 9.26. irudia).

ω konstantea denez, abiadura angeluarraren definizioa zehatza da:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Honela adierazten da angeluaren aldaketa ($\Delta\theta$ angelu ekortua) denbora tarte jakin batean: $\Delta\theta = \omega \cdot \Delta t$. Higikariaren kokalekua θ_0 da $t_0 = 0$ s denean. Angelu ekortua $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ da; igarotako denbora $\Delta t = t - t_0 = t - 0 = t$. Horrela, adierazpen hau lortuko dugu:

$$\theta - \theta_0 = \omega \cdot t \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \theta_0 + \omega \cdot t$$

Hau da **posizioaren ekuazioa HZRUn:**

$$\boldsymbol{\theta(t) = \theta_0 + \omega \cdot t}$$

Higidura zuzena ez denez, **azelerazioa normala** izango da. Honela kalkulatzen da haren modulua:

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(\omega \cdot R)^2}{R} \Rightarrow \boldsymbol{a_N = \omega^2 \cdot R}$$

Azelerazio normalaren (a_N) modulua konstantea da, ω eta R konstanteak baitira. $\vec{a}_N$ bektorea, aldiz, ez da konstantea, haren norabidea etengabe aldatzen baita (▸ 9.26. irudia).

ADIBIDE EBATZIA

14 **CD bat 539 b/min-ko abiadura angeluar maximoarekin biraka ari da. Kalkulatu: angelua abesti bat erreproduzitzen ari den artean (4 min); diskoaren ertzean dagoen puntu batek egindako distantzia, eta haren azelerazio normala (CDek 12 cm-ko diametroa dute).**

Adierazi SIko unitateetan:

$$539 \text{ b/min} = 539 \frac{\cancel{\text{bira}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{bira}}} = 56{,}44 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$4 \text{ min} = 4 \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60 \text{ s}}{1 \cancel{\text{min}}} = 240 \text{ s} \qquad R = \frac{12 \text{ cm}}{2} = 6 \text{ cm} = 0{,}06 \text{ m}$$

Angelua: $\theta = \theta_0 + \omega \cdot t = 0 \text{ rad} + 56{,}44 \text{ rad/s} \cdot 240 \text{ s} =$ **13.546,5 rad**

Egindako distantzia: $s = \theta \cdot R = 13.546{,}5 \text{ rad} \cdot 0{,}06 \text{ m} =$ **812,8 m**

Azelerazio normala: $a_N = \omega^2 \cdot R = (56{,}44 \text{ rad/s})^2 \cdot 0{,}06 \text{ m} =$ **191 m/s²**

Periodoa eta frekuentzia

HZRUn abiadura konstantea denez, oso erabilgarria da bira oso bati dagozkion magnitudeak definitzea. Hori horrela izanda:

- **Periodoa** (T) higikariak **bira oso bat** emateko behar duen denbora da. Hau da:

$$\Delta\theta = 2\pi \text{ rad}, \Delta t = T \text{ denean}$$

Periodoa segundotan (s) neurtzen da.

- **Frekuentzia** (f) periodoaren (T) alderantzizkoa da. Higikariak **segundo batean ematen duen bira kopurua** adierazten du.

Frekuentzia s^{-1}-etan eta hertzetan (Hz) neur daiteke.

Aurreko definizioak kontuan hartuta, honela adierazten da abiadura angeluarra frekuentzia edo periodoa kontuan hartuta:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{1}{f}} = 2\pi \cdot f$$

Hau da **abiadura angeluarraren** eta **frekuentziaren** arteko erlazioa:

$$\boldsymbol{\omega = 2\pi \cdot f}$$

4.5. Higidura zirkular uniformeki azeleratua, HZRUA

Azelerazio angeluar konstantearekin ibilbide zirkularra egiten ari den higikari batek **higidura zirkular uniformeki azeleratua (HZRUA)** du.

- Baldin eta $\alpha = \text{kte.} \Rightarrow a_T = \alpha \cdot R = \text{kte.}$
- $\omega \neq \text{kte.} \Rightarrow a_N = \omega^2 \cdot R \neq \text{kte.}$

Beraz, guztizko azelerazioa, bi bektoreen arteko batura da, ($\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$), eta denboran zehar aldatuko da (▸ 9.27. irudia).

Azelerazio angeluarra konstantea denez:

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \text{kons.}$$

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} \Rightarrow \omega - \omega_0 = \alpha \cdot (t - t_0)$$

Hau da HZRUAn **abiadura angeluarra** eta denbora erlazionatzen dituen ekuazioa:

$$\boldsymbol{\omega(t) = \omega_0 + \alpha \cdot t}$$

$t_0 = 0$ dela suposatuz.

Denbora igaro ahala abiadura angeluarra handitzen denean, $\alpha > 0$. Denbora igaro ahala abiadura angeluarra txikitzen denean, $\alpha < 0$. Azeleratuz gero, denbora-unitate batean gero eta angelu handiagoak egingo ditu, eta balaztatuz gero, denbora-unitate berean gero eta angelu txikiagoak egingo ditu.

ADIBIDE EBATZIA

15 DVD irakurgailu baten biraketa-abiadura 5.400 b/min-koa da. Zehaztu hauek: abiadura angeluarra rad/s-tan, frekuentzia eta periodoa.

Biraketa-abiadurari buruzko informazioa DVDak minutuko ematen dituen biren ingurukoa da:

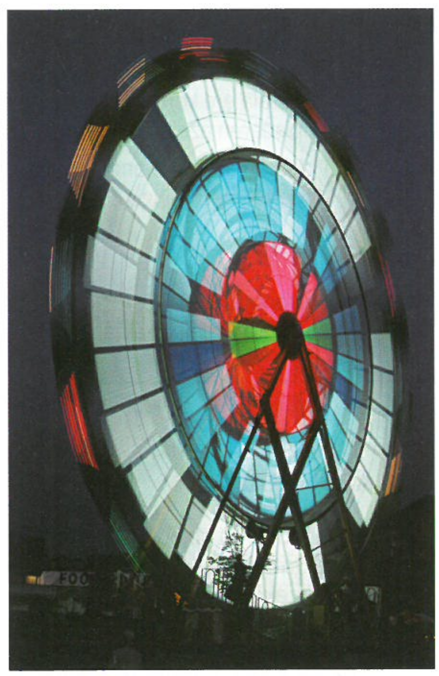
$$\omega = 5.400 \frac{\cancel{\text{bira}}}{\cancel{\text{min}}} \cdot \frac{1 \cancel{\text{min}}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \cancel{\text{bira}}} = \mathbf{180\pi \frac{rad}{s}}$$

Frekuentzia kalkulatzeko, erabili $\omega = 2\pi \cdot f$ formula eta bakandu:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{180\cancel{\pi} \text{ rad/s}}{2\cancel{\pi}} = \mathbf{90 \text{ Hz}}$$

Periodoa eta frekuentzia alderantzizkoak dira; beraz:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{90 \text{ Hz}} = \mathbf{0{,}0\widehat{1} \text{ s}}$$



9.27. irudia. Eguneroko bizitzan, higidura uniformeak baino ohikoagoak dira **higidura zirkular uniformeki azeleratuak.** Hain zuzen ere, higikari batek izan dezakeen edozein gurpilek higidura mota hori izaten du.