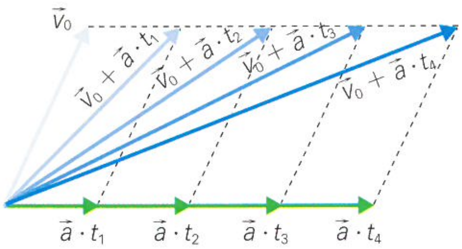
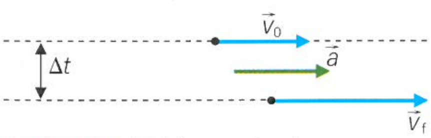
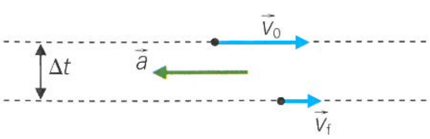
**9.6. irudia.** Lurrak **pisu** deritzon indarra egiten du haren lurrazaletik hurbil dauden gorputzetan. Horren ondorioz, erortzen direnean, gorputz horiek azelerazio konstantea *(g)* izaten dute.




**9.7. irudia.** Eskuarki, **amaierako abiadura** izaten da hasierako abiadura, $\vec{v}_0$, gehi denboran izandako abiadura, $\vec{a} \cdot t$, ibilbidea edozein dela ere. Higidura $\vec{v}_0$ eta $\vec{a}$ bektoreek zehaztutako planoan gertatzen da.




**9.8. irudia.** Higidura azeleratua.




**9.9. irudia.** Higidura desazeleratua.

## 2 Azelerazio konstantea duten higidurak

Egoera askotan gertatzen dira azelerazio konstantea duten higidurak: gorputz bat plano inklinatu batean irristan edo biraka doanean, indar konstantea erabiliz gorputz bati bultza edo tira egiten diogunean, kargatutako partikula bat eremu elektriko uniforme batean higitzen denean edo lurrazalaren azpian grabitatearen ondorioz higidurak gertatzen direnean.

**Higidura uniformeki azeleratuan (HUA),** higikari bat azelerazio konstantearekin desplazatzen da: $\vec{a}$ = konstantea.

### 2.1. Abiaduraren ekuazioa HUAn

HUA zehazten duten ekuazioak zein diren ikusiko dugu. Horretarako, azelerazioaren definizioa hartuko dugu abiapuntutzat:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \text{kte.}$$

Aurreko ekuaziotik $\Delta \vec{v}$ bakantzean, denboran zeharreko abiadura, $\vec{v}(t)$, kalkulatzeko ekuazioa lortuko dugu:

$$\Delta \vec{v} = \vec{a} \cdot \Delta t$$

$\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, eta $\Delta t = t - t_0$ denez,

$\vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{a} \cdot (t - t_0)$ lortuko dugu.

Hasierako abiadura ($\vec{v}_0$) $t_0$ uneari dagokion abiadura da (kasu honetan, $t_0 = 0$ s eta $t - t_0 = t$). Beraz, esan dezakegu:

Hau da **abiaduraren ekuazio bektoriala** HUAn:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

Higiduraren norabidea eta $X$ ardatz horizontala bat etorrarazten baditugu, osagai bakarreko bektoreak geratuko zaizkigu: $\vec{v}_0 = v_0 \, \vec{i} + 0 \, \vec{j}$; eta $\vec{a} = a \, \vec{i} + 0 \, \vec{j}$.

Abiaduraren ekuazioa hartu, $\vec{v}(t) = (v_0 \, \vec{i} + 0 \, \vec{j}) + (a \, \vec{i} + 0 \, \vec{j}) \cdot t$, eta $\vec{v}(t) = (v_0 + a \cdot t) \, \vec{i} + 0 \, \vec{j}$ adierazpena berrantolatuko dugu. Bigarren osagaia nulua denez, adierazpena sinplifika dezakegu:

**Abiaduraren ekuazio eskalarra** HUAn:

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$\vec{v}_0$ eta $\vec{a}$ bektoreek **noranzko bera** izanez gero, noranzko hori kontuan hartuta hautatuko dugu ardatz positiboa. Horrela, $\boldsymbol{v_0}$ eta $\boldsymbol{a}$ **osagai positiboak** dira ($v_0 > 0$; $a > 0$). Azelerazioaren bitartez, abiaduraren modulua $\vec{v}$ handitu egin da denboran: higidura **azeleratua** da. Azeleratuz gero, abiadura handitu egiten da, denbora igaro ahala (► 9.8. irudia).

$\vec{v}_0$ eta $\vec{a}$ bektoreek **kontrako noranzkoa** izanez gero, $\vec{v}_0$ bektorearen noranzkoa kontuan hartuta hautatuko dugu ardatz positiboa. Horrela, $\boldsymbol{v_0}$ **positiboa** eta $\boldsymbol{a}$ **negatiboa** ($v_0 > 0$; $a < 0$) dira. Azelerazioaren bitartez, abiaduraren modulua, $\vec{v}$, txikitu egin da denboran: higidura **desazeleratua** da. Balaztatuz gero, abiadura txikitu egiten da, denbora igaro ahala (► 9.9. irudia).

## 2.2. Posizioaren ekuazioa HUAn

Ikus dezagun zer gertatzen den higidura zuzena ez denean.

HUAren ekuazioak zein diren jakiteko hurrengo pausoa posizioaren ekuazioa lortzea da; hau da, $\vec{r} = r(t)$ funtzioa, higikariak edozein unetan zer posizio duen kalkulatzeko erabiliko duguna. Horretarako, aldiuneko abiaduraren zehaztapena hartuko dugu abiapuntutzat:

$$\vec{v} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Zehaztapen horretatik: $\Delta\vec{r} \approx \vec{v} \cdot \Delta t$. Kontuan hartuta $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$, eta $t_0 = 0$ s dela, hau ondoriozta dezakegu: $\Delta t = t - t_0 = t$. Ondoren, ordezkatu egingo dugu: $\vec{r} - \vec{r}_0 \approx \vec{v} \cdot (t - t_0)$; eta posizio-bektorea bakandu: $\vec{r} \approx \vec{r}_0 + \vec{v} \cdot t$.

Adierazpen hau gutxi gorabeherakoa da, $\vec{v}$ ez baita konstantea. Hala ere, uniformeki aldatzen denez (azelerazio konstantea), haren batez besteko balioarekin ordezka dezakegu. Horrela, adierazpen zehatza lortuko dugu: $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_m \cdot t$.

Hau da batez besteko abiadura:

$$\vec{v}_m = \frac{\vec{v} + \vec{v}_0}{2} = \frac{(\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t) + \vec{v}_0}{2} = \frac{2\,\vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t}{2} = \vec{v}_0 + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t$$

Ordezkatu ondoren, posizioaren ekuazioa lortuko dugu:

Hau da **posizioaren ekuazio bektoriala** HUAn:

$$\vec{r}\,(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2$$

$\vec{r}_0$ bektoreak hasierako posizioa adierazten du ($t = 0$ s denean).

## 2.3. Higidura zuzen uniformeki azeleratua

**Higidura zuzen uniformeki azeleratua (HZUA)** ibilbide zuzena eta azelerazio konstantea dituen higidura da.

Aurreko kasuetan bezala, bektoreek norabide bera dutenez, higidura zuzena izango da. Osagaietako bat nulua denez, nahikoa dugu lehenengo osagaiarekin.

**Posizioaren ekuazio eskalarra** HZUAn:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

### ADIBIDE EBATZIA

**5** Higikari baten hasierako posizioa $\vec{r}_0 = 3\,\vec{i}$ m da; haren hasierako abiadura $\vec{v}_0 = 0{,}5\,\vec{i} + 0{,}75\,\vec{j}$ m/s da, eta azelerazio uniformea du, $\vec{a} = 2\,\vec{j}$ m/s$^2$.

a) Kalkulatu posizio-bektorea $t = 2$ s unerako.

b) Kalkulatu abiadura-bektorea $t = 2$ s unerako.

a) $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \vec{a} \cdot t^2 = 3\,\vec{i} + (0{,}5\,\vec{i} + 0{,}75\,\vec{j}) \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 2\,\vec{j} \cdot t^2 =$

$= (3 + 0{,}5 \cdot t)\,\vec{i} + (0{,}75 \cdot t + t^2)\,\vec{j}$ m

Baldin eta $t = 2$ s: $\vec{r}(2\text{ s}) = (3 + 0{,}5 \cdot 2)\vec{i} + (0{,}75 \cdot 2 + 2^2)\vec{j}$ m $=$ **$4\,\vec{i} + 5{,}5\,\vec{j}$ m**

b) $\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t = (0{,}5\,\vec{i} + 0{,}75\,\vec{j}) + 2\,\vec{j} \cdot t = 0{,}5\,\vec{i} + (0{,}75 + 2 \cdot t)\,\vec{j}$ m/s

Baldin eta $t = 2$ s: $\vec{v}(2\text{ s}) = 0{,}5\,\vec{i} + (0{,}75 + 2 \cdot 2)\vec{j}$ m $=$ **$0{,}5\,\vec{i} + 4{,}75\,\vec{j}$ m/s**

### TRESNA MATEMATIKOAK

**Deribatua**

Dagoeneko badakigu deribatu izeneko funtzio bati esker, abiadura zehaztu dezakegula. Honela zehazten da funtzio hori:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

HUA baten posizio-ekuazioa abiapuntutzat hartuta, edozein aldiunetarako abiadura kalkula dezakegu.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

### JARDUERAK

**9.** Higikari baten hasierako posizioa $\vec{r}_0 = 2\,\vec{i}$ m da; hasierako abiadura, $\vec{v}_0 = 3\,\vec{i} - 4\,\vec{j}$ m/s, eta azelerazioa, $\vec{a} = 0{,}3\,\vec{i} + 0{,}8\,\vec{j}$ m/s$^2$.

a) Kalkulatu abiadura eta posizioa une hauetan: $t_1 = 1$ s eta $t_2 = 2$ s.

b) Adierazi hiru posizioak diagrama kartesiar batean, eta egin posizio bakoitzari dagokion abiadura-bektorea.

c) Higidura uniformeki azeleratua al da? Higidura zuzena al da?

Emaitza: a) $\vec{v}_1 = 3{,}3\,\vec{i} - 3{,}2\,\vec{j}$ m/s; $\vec{r}_1 = 5{,}15\,\vec{i} - 3{,}6\,\vec{j}$ m; $\vec{v}_2 = 3{,}6\,\vec{i} - 2{,}4\,\vec{j}$ m/s; $\vec{r}_2 = 8{,}6\,\vec{i} - 6{,}4\,\vec{j}$ m

**10.** $3 \cdot 10^5$ m/s-ko abiaduran higitzen ari zen elektroi bat gelditu egin da beste karga batzuk zeudelako.

a) Balaztatze-azelerazioa 106 cm/s$^2$-koa bada, zenbat denbora beharko du elektroiak bere abiadura erdira jaisteko?

b) Eta zenbat denbora beharko du abiadura erdira jaisten duenetik erabat gelditzen den arte?

c) Alderatu bi emaitzak, eta azaldu zergatik diren berdinak.

Emaitza: a) 15 s; b) 15 s

## 2.4. HZUAren ekuazioak

Bektoreak paraleloak direnean, erreferentzia-sistema orienta daiteke, osagai bakar bat egon dadin. Ekuazio eskalarrak lortuko ditugu:

**Ekuazio eskalarrak:**

$$\boldsymbol{v(t) = v_0 + a \cdot t} \qquad \boldsymbol{x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

Zenbat denbora igaro den jakinez gero, erabilgarria izaten da abiadura eta posizioa ($a$ konstantearekin) zuzenean erlazionatzen dituen ekuazio bat izatea. Ekuazio hori lortzeko, abiaduraren ekuaziotik $t$ bakandu behar da eta posizioaren ekuazioan ordezkatu. $\Delta x = x(t) - x_0$ dela kontuan hartuta:

$$v = v_0 + a \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x(t) - x_0 = \frac{v_0 \cdot v - v_0^2}{a} + \frac{v^2 - 2 \cdot v \cdot v_0 + v_0^2}{2 \cdot a}$$

$$\Delta x = \frac{\cancel{2 \cdot v_0 \cdot v} - 2 \cdot v_0^2 + v^2 - \cancel{2 \cdot v_0 \cdot v} + v_0^2}{2 \cdot a} = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$$

Hortik, HZUAri dagokion adierazpena lor dezakegu:

$$\boldsymbol{v^2 - v_0^2 = 2 \cdot a \cdot \Delta x}$$

### ADIBIDE EBATZIA

**6** **Tren bat 0,5 m/s²-ko azelerazio konstantearekin hasi da higitzen. Zenbat denbora beharko du 270 km/h-ko abiadura lortzeko?**

Hasteko, adierazi amaierako abiadura m/s-tan:

$$270\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1.000\text{ m}}{1\,\cancel{\text{km}}} \cdot \frac{1\,\cancel{\text{h}}}{3.600\text{ s}} = 75\text{ m/s}$$

Abiatu denean trena geldirik zegoenez ($v_0 = 0$) badakigu zein diren amaierako abiadura eta azelerazio positiboa. Beraz, bakandu eta kalkulatu denbora:

$$v = v_0 + a \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{75\text{ m/s} - 0\text{ m/s}}{0{,}5\text{ m/s}^2} = \mathbf{150\ s}$$

Trenak 150 s (2 min 30 s) behar ditu 270 km/h-ko abiadura lortzeko.

### JARDUERAK

**11.** Gidari bat 90 km/h-ko abiaduran doa eta oztopo bat ikusi du errepidean. Une horretan bertan balaztari eragin dio, eta ibilgailua gelditzen hasi da 1,5 m/s²-ko dezelerazio konstantearekin. Kalkulatu ibilgailuaren eta oztopoaren arteko distantzia, kontuan hartuta 10 segundo igaro ondoren, ibilgailua oztopoaren aurre-aurrean gelditu dela.

Emaitza: 175 m

**12.** Higikari bat gainazal horizontal batean higitzen ari da 5 m/s-ko abiaduran. Higikari horri marruskadura-indarrak eragiten dio eta, horren ondorioz, 0,5 m/s²-ko azelerazioarekin ari da balaztatzen. Kalkulatu zer abiadura izango duen higikariak 8 m egin ondoren, eta zer distantzia egingo duen guztiz gelditu baino lehen.

Emaitza: 4,12 m/s; 25 m

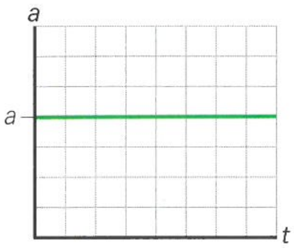
## 2.5. HZUAren adierazpen grafikoa

- **a-t grafikoa.** Azelerazioa *(a)* konstantea denez, denboran zeharreko higiduraren adierazpena denbora-ardatzaren paraleloa den zuzen bat da (▸ 9.10 irudia).

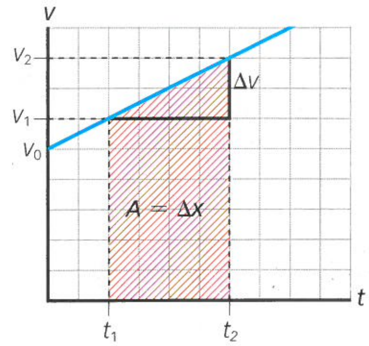
- **v-t grafikoa.** Zuzen bat izaten da beti. Zuzen horren malda azelerazioa da, eta hasierako abiadura ($v_0$), aldiz, jatorrizko ordenatua (▸ 9.11 irudia).

  HZUn bezala, abiadura adierazten duen zuzenaren beheko aldearen azalerak egindako espazioa adierazten du. Kasu honetan trapezio bat da, oin handia ($v_2$) eta oin txikia ($v_1$) bertikalean dituena eta altuera ($t_2 - t_1$) horizontalean.

$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot (t_2 - t_1)$$

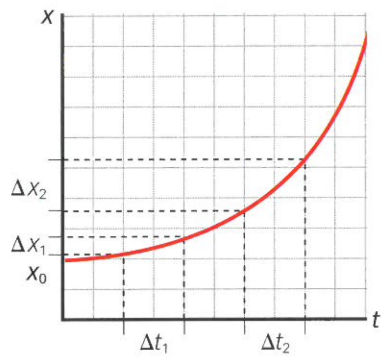



**9.10. irudia.** Azelerazioak balio bera du beti.




**9.11. irudia.** Malda positiboa denean, higidura azeleratua izaten da; negatiboa denean, ordea, balaztatze-higidura.

- **x-t grafikoa.** Posizioaren adierazpena $t^2$-ren araberakoa denez, haren irudikapena parabola bat da, eta parabola horren jatorrizko ordenatua hasierako espazioari, $x_0$, dagokio. Azelerazioaren arabera, parabola hori positiboa edo negatiboa izan daiteke (▸ 9.12 irudia).




**9.12. irudia.** Ohartu denbora-tarte berdinetan, higikariak gero eta distantzia handiagoa egiten duela: $\Delta x_2 > \Delta x_1$.

### ADIBIDE EBATZIA

**7** **72 km/h-ko abiaduran doan auto batek modu konstantean azeleratu du 6 segundoz, 93,6 km/h-ko abiadura lortzeko. 5 segundoz abiadura horretan joan ondoren, balaztatu eta 100 metrotan gelditu da.**

**a) Kalkulatu azelerazioa lehen 6 segundo horietan.**

**b) Kalkulatu balaztatze-azelerazioa.**

**c) Egin ibilbide guztiaren *v-t* grafikoa.**

**d) Kalkulatu guztira egindako espazioa.**

Eman abiadura SI sistemako unitateetan:

$$v_0 = 72 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1.000 \text{ m}}{1 \cancel{km}} \cdot \frac{1 \cancel{h}}{3.600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

$$v_B = 93{,}6 \frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1.000 \text{ m}}{1 \cancel{km}} \cdot \frac{1 \cancel{h}}{3.600 \text{ s}} = 26 \text{ m/s}$$

a) Lehen 6 segundoetan autoak azelerazio konstantea darama. Kalkulatzeko, bakandu.

$$v_B = v_0 + a_A \cdot t$$

$$a_A = \frac{v_B - v_0}{t} = \frac{26 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}}{6 \text{ s}} = \mathbf{1\ m/s^2}$$

b) Denboraren datua ez dugunez, balaztatze-azelerazioa kalkulatzeko, abiadura eta posizioa erlazionatzen dituen ekuazioa erabili behar dugu:

$$v^2_{\text{amaierakoa}} - v^2_B = 2 \cdot a_C \cdot \Delta x$$

$$a_C = \frac{v^2_{\text{amai}} - v^2_B}{2 \cdot \Delta x} = \frac{(0 \text{ m/s})^2 - (26 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 100 \text{ m}} = \mathbf{-3{,}38\ m/s^2}$$

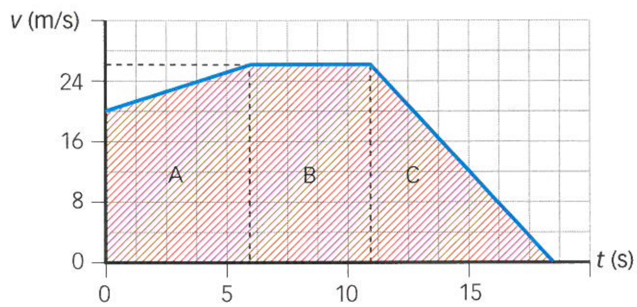
c) A tartean autoak HZUA darama, 6 segundoz.
B tartean HZU darama, 5 segundoz.

Balaztatze-tartea marrazteko, gelditzeko zenbat denbora behar izan duen jakin behar dugu. $t_C$ bakanduz:

$$v_{\text{amaierakoa}} = v_B + a_C \cdot t_C$$

$$t_C = \frac{v_{\text{amaierakoa}} - v_B}{a_C} = \frac{0 \text{ m/s} - 26 \text{ m/s}}{-3{,}38 \text{ m/s}^2} = 7{,}69 \text{ s}$$

Hau da ibilbide guztiaren adierazpen grafikoa:




d) *v-t* grafikoarekin egindako bidea kalkula dezakezu. Marra urdinaren azpian dagoen eremuak adierazten du bide hori. A tarteari dagokion trapezioa gehi B tartearen azpiko laukizuzena, gehi C tartearen distantzia egin behar duzu.

$$\Delta x = \frac{v_B + v_0}{2} \cdot t_A + v_B \cdot t_B + 100 \text{ m}$$

$$\Delta x = \frac{26 \text{ m/s} + 20 \text{ m/s}}{2} \cdot 6 \text{ s} + 26 \text{ m/s} \cdot 5 \text{ s} + 100 \text{ m}$$

$$\Delta x = 138 \text{ m} + 130 \text{ m} + 100 \text{ m} = \mathbf{368\ m}$$