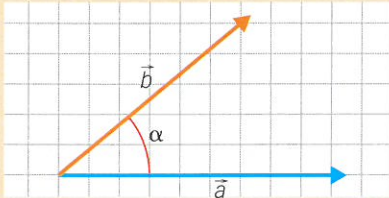


2 Lana

TRESNA MATEMATIKOAK

\vec{a} eta \vec{b} bektoreak izanik, honela definitzen da **biderkadura eskalarra**: bektoreen moduluko bider bektore horiek osatzen duten angeluaren kosinua.



$$\text{Biderkadura eskalarra} = \vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

- Bektoreek norabide eta noranzko berberak badituzte: $\alpha = 0^\circ$ eta $\cos \alpha = 1$; horrenbestez, bektoreen moduluen biderkaduraren berdina da biderkadura eskalarra.
- Bektoreek norabide bera baina noranzko desberdinak badituzte: $\alpha = 180^\circ$ eta $\cos \alpha = -1$; ondorioz, bektoreen moduluen biderkaduraren berdina izango da biderkadura eskalarra, baina minus zeinuarekin.
- Bektoreak elkarzutak badira: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Izan ere: $\alpha = 90^\circ$ eta $\cos 90^\circ = 0$.

Fisikaren ikuspegitik, lanaren definizioan hiru magnitude daude: **lana**, **desplazamendua** eta horien arteko **angelua**. Baina, ikusiko dugun bezala, indar batek lana egin dezan, ezinbestean bete behar dira bi baldintza hauek:

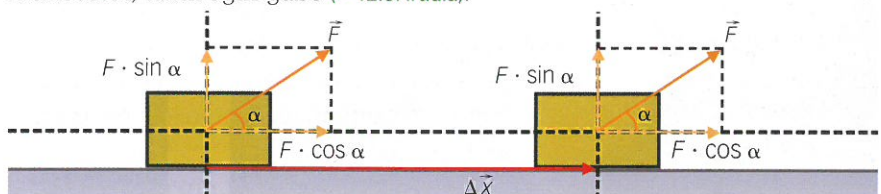
- Gorputza desplazatzen ari dela, indarra jarduten egotea.
- Indarra ez izatea desplazamenduarekiko zuta.

2.1. Lanaren definizioa

Egoerarik soilenean, indarrak eta desplazamenduak noranzko bera dute. Kasu horretan, lana oso erraz kalkulatu da: indarraren modulua eta desplazamendua biderkatu behar ditugu.

Aitzitik, diharduen indarrak desplazamenduaren norabide bera ez duenean, lana kalkulatzeko konplikatuagoa da.

Zer gertatzen da gorputz bat horizontalarekin α angelua osatzen duen norabide batean tiratuz arrastatzen dugunean? Egindako indarraren bi osagaietatik, osagai paraleloak baino ez du balio gorputza arrastatzeko; osagai zutak bertikalki tiratzen du gorputzetik, higidurarik sortu gabe, eta horrenbestez, lanik egin gabe (► 12.6. irudia).



12.6. irudia. Desplazamenduarekiko paraleloa den indarrak, \vec{F}_x -k ($F_x = F \cdot \cos \alpha$), baino ez du egin lana.

Kasu honetan, lana (W) honela definitzen da: desplazamenduaren (Δx) modulua bider desplazamenduarekiko paraleloa den indarraren osagaia:

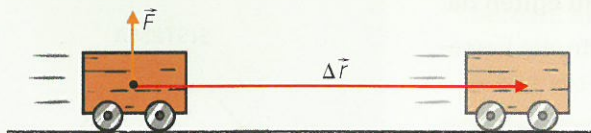
$$W = F \cdot \cos \alpha \cdot \Delta x$$

Ikus ditzagun zenbait kasu higitzen ari den gorputz bati lotuta:

1. Lekuz aldatzen da, abiadura konstantez eta marruskadurarik gabe:

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot \cos 90^\circ = 0$$

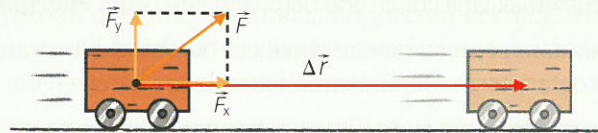
Ez da lanik egin.



3. Desplazatu egin da, azeleratuta (lehen baino gutxiago):

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha = F_x \cdot \Delta x$$

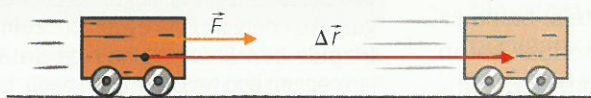
\vec{F}_x -k bakarrik egin du lana. \vec{F}_y -k ez du lanik egin.



2. Lekuz aldatzen da, azeleratuta:

$$W_F = F \cdot \Delta x \cdot \cos 0^\circ = F \cdot \Delta x$$

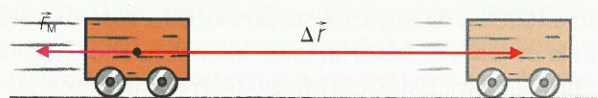
Lana egin da.



4. Aurrera egin du, baina balaztatuta:

$$W_F = F_M \cdot \Delta x \cdot \cos 180^\circ = -F_M \cdot \Delta x$$

Marruskadura-indarraren lana negatiboa da.



Oro har, indar konstante baten lana bi hauen **biderkadura eskalarra** da: \vec{F} bektorea bider desplazamendu-bektorea ($\Delta\vec{r}$), bi bektore horiek osatzen duten angelua da α izanik:

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha$$

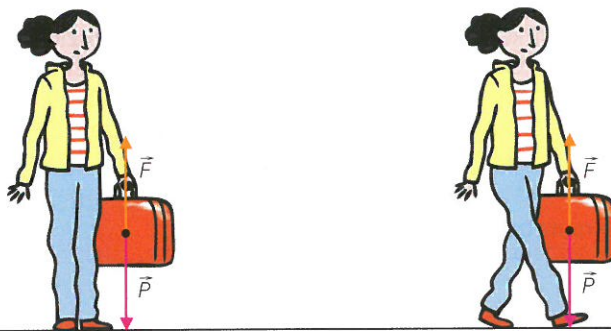
SI sisteman, lanaren unitatea **joulea (J)** da. Honela definitzen da joule bat: 1 N-eko indar batek egindako lana, higiduraren norabide berean jardunez eta 1 m-eko desplazamendua sortuta.

Bektoreen biderkadura eskalarra izanik, **lana magnitude eskalarra da**. Ez du ez norabiderik ez noranzkorik, eta beraz, ez da bektore bidez irudikatzen, abiadurarekin edo indarrarekin gertatzen den bezala.

- $\alpha < 90^\circ$ bada, lana **positiboa** da ($\cos \alpha > 0$).
- $\alpha = 90^\circ$ bada, lana **nulua** da ($\cos \alpha = 0$); indarrak ez du lanik egiten.
- $\alpha > 90^\circ$ bada, lana **negatiboa** da ($\cos \alpha < 0$). Marruskadura kontuan hartzen dugun aldi guztietan gertatzen da hori ($\alpha = 180^\circ$), marruskadura-indarrak beti baitu higiduraren aurkako noranzkoa (► 12.7. irudia).

Fisikan, lanaren definizioa beti ez dator bat normalean termino horri ematen diogun esanahiarekin (ahalegina eta nekea). Batzuetan ahalegina egiten dugu, eta nekatu egiten gara baina ez dugu lanik egiten, fisikak termino horri ematen dion esanahiari jarraiki. Esate baterako:

- Gorputz bat bultzatzen dugunean baina higitzea lortzen ez dugunean, ez dugu lan fisikorik egiten; nahiz eta asko nekatu, desplazamendurik ez dago.
- Gorputz bat esekita eusten dugunean, egiten dugun indarra pisuaren berdina eta kontrakoa izanik, ez dugu lanik egiten, ezta gainazal horizontal batetik harekin higitzen garenean ere (► 12.9. irudia).



12.9. irudia. Maletaren garaiera aldatu gabe desplazatzen bagara, ez dugu lanik egiten.

ADIBIDE EBATZIA

- 1 15 kg-ko mahaia batetik tiratzen dugu, azalera horizontal baten gainean, horizontalarekin 60° -ko angelua osatzen duen 160 N-eko indar konstante batez. Kalkulatu aplikatutako indarraren eta marruskadura-indarraren lana, mahaia 5 m desplazatzen badugu.

Datua: $\mu_z = 0,4$.

- Aplikatutako indarraren lana:

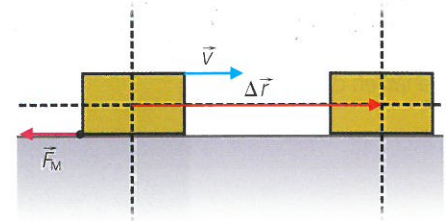
$$W_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta x \cdot \cos \alpha = 160 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos 60^\circ = \mathbf{400 \text{ J}}$$

- Marruskadura-indarraren lana: $F_M = \mu_z \cdot N$. Kasu honetan, $N + F_y = m \cdot g$.

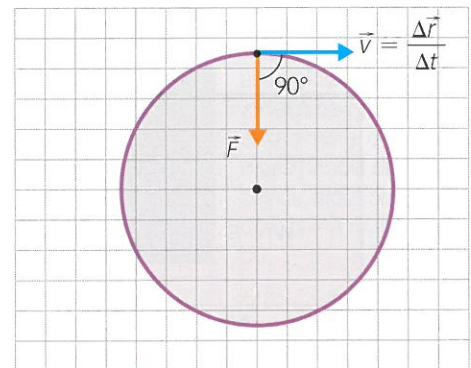
$$N = m \cdot g - F \cdot \sin 60^\circ = 15 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 - 160 \text{ N} \cdot \sin 60^\circ = 8,44 \text{ N}$$

$$W_M = \vec{F}_M \cdot \Delta\vec{r} = F_M \cdot \Delta x \cdot \cos 180^\circ = -\mu_z \cdot N \cdot \Delta x = -0,4 \cdot 8,44 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} = \mathbf{-16,87 \text{ J}}$$

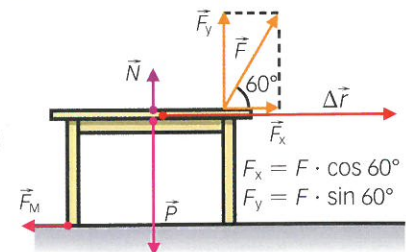
Egindako indarraren ondoriozko lana positiboa da, eta marruskadura-indarraren ondoriozko lana, berriz, negatiboa.

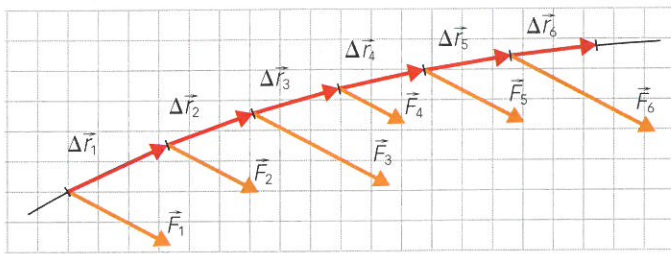


12.7. irudia. Marruskadura-indarra abiaduraren aurkakoa denez, marruskaduragatiko lana negatiboa da.



12.8. irudia. Indarra desplazamenduarekiko zuta bada (higidura zirkularretan gertatzen den bezala), ez da lanik egiten.





12.10. irudia. Indar ez-konstanteekin, ibilbidea oso desplazamendu txikitan banatzen dugu.

Indarra aldakorra denean, oso desplazamendu txikitan banatu behar dugu ibilbidea: $\Delta\vec{r}_1$, $\Delta\vec{r}_2$, $\Delta\vec{r}_3$, eta abar; horietako bakoitzean, diharduen indarra (\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \vec{F}_3) konstantetzat har dezakegu, gutxi gorabehera. \vec{F}_1 , \vec{F}_2 eta \vec{F}_3 indarrak elkarren artean berdinak izatea ez da ezinbestekoa (► 12.10. irudia).

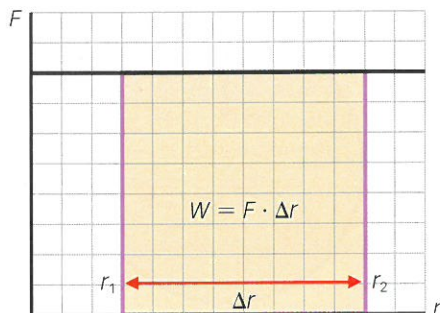
Gutzizko lana kalkulatzeko, desplazamendu bakoitzarekin ($\Delta\vec{r}_i$) lotutako lan txikiak batu behar dira. Hau da:

$$W_{\text{gutzizkoa}} = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

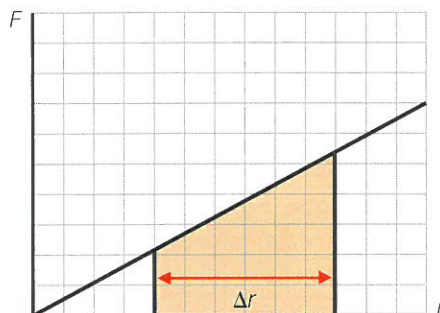
2.2. Lanaren kalkulu grafikoa

Indarra posizioarekin erlazionatuta irudikatuta eta aurreko definizioa erabiliz ondorioztatzen da indarrak (\vec{F}) desplazamenduan ($\Delta\vec{r}$) egindako lana (biek norabide bera izanik) grafikoko r_1 eta r_2 puntuen arteko azaleraren berdina dela.

Prozedura hori orokorra da, eta edozein indarren lana kalkulatzeko erabilgarria, baita indarraren modulu konstantea ez den kasuetan ere (► 12.11.-12.13. irudiak).



12.11. irudia. Irudian, koloreztatutako azalera da lana.



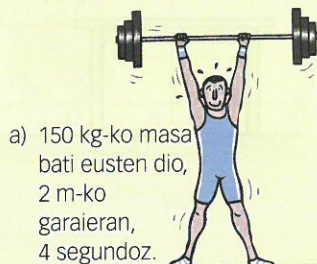
12.12. irudia. Irudian, koloreztatutako azalera lanaren balioa ematen digu.



12.13. irudia. Funtzio integrala erabiltzen da kurbaren azpiko azalera kalkulatzeko.

JARDUERAK

- Kalkulatu pisuak egiten duen lana, 3 kg-ko masa duen gorputz bat 10 m-ko garaieratik erortzen denean. Datua: $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.
Emaitza: 294 J
- Horizontalarekin 30° -ko angelua osatzen duen 100 N-eko indar batek gorputz batetik tiratzen du. Gorputza 2,6 m desplazatzen bada plano horizontalean, kalkulatu indar horrek egindako lana. Marruskadura-indarra 1,2 N-ekoa dela jakinda, kalkulatu, baita ere, marruskadurak egindako lana.
Emaitzak: 225 J; $-3,12 \text{ J}$
- Esan irudiko pertsonen lana egiten duten, eta eman arrazoiak:



- a) 150 kg-ko masa bati eusten dio, 2 m-ko garaieran, 4 segundoz.



- b) Malgukiari eusten dio, 10 segundoz, hura luzatuta dagoela.



- c) 60 kg-ko patinatzailea 10 minutuz labaintzen da, marruskadurarik gabe, eta abiadura konstantez.

- Gorputz bat higidura zirkular eta uniformeaz higitzen da. Egiten al du lana higidura hori eragiten duen indarrak? Zergatik?