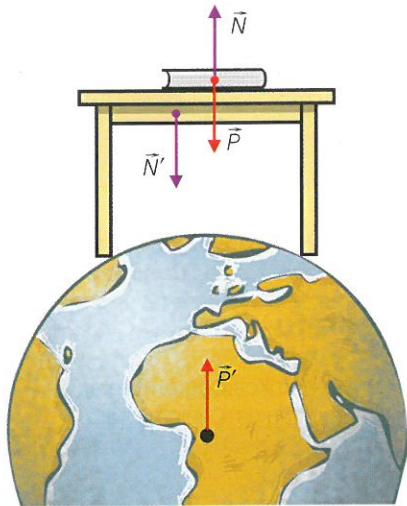


## 2 Ukipen-indarrak

### 2.1. Indar normala



10.8. irudia.  $\vec{N}$  normala eta  $\vec{P}$  pisua ez dira indar pare bat (akzioa-erreakzioa).

Newtonen hirugarren legearen ondorio bat indar normala da. Gorputz bat gainazal baten gainean jartzen denean, harekin interakzioa du. Hirugarren legeari jarraiki, gorputzak indar bat eragiten badio gainazal bati, hark ere indar bat eragingo dio gorputzari. Hori da, hain zuzen, **indar normala**. Gainazal horren ukitze-planoaren norabide zutean dago indar hori, kanporantz zuzenduta (► 10.8. irudia).

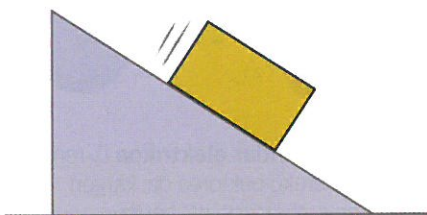
Lurrak liburuak erakartzen du, eta liburuak Lurra erakartzen du; grabitazio-interakzioak sortutako bi indar dira horiek:

$$\vec{P} = \vec{F}_{\text{Lurrak liburuari}} = -\vec{F}_{\text{liburuak Lurrari}} = \vec{P}'$$

Ikusten dugunez, liburuak pausagunean dago, orekan dago. Beraz, orekatzen duen indarren bat egon behar du. Liburuaren gainazal mahaiarekin izandako interakzioen ondoriozkoa da indar hori. Mahaiak indar bat eragiten dio liburuari: indar normala. Gainera, liburuak ere indar bat eragiten dio mahaiari.

$$\vec{N} = \vec{F}_{\text{mahaiak liburuari}} = -\vec{F}_{\text{liburuak mahaiari}} = \vec{N}'$$

Garrantzitsua da ulertzea liburuak mahaiaren gainazalean egiten duen indarra,  $\vec{N}'$ , ez dela haren pisua,  $\vec{P}$ . Liburuak Lurraren presentziaren eraginez jasaten duen erakarpeneko grabitazio-indarra da pisua.  $\vec{P}$  eta  $\vec{N}'$  indar desberdinak dira, modulu, norabide eta noranzko berak badituzte ere, eragileak desberdinak direlako.



10.9. irudia.

### JARDUERA

7. 4. adibide ebatziari jarraiki, kalkulatu ondoriozko indarren balioa, kontuan hartuz blokeak 5 kg-ko masa duela, eta planoak 35°-ko inklinazioa. Datua:  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Emaitza: 28,1  $\vec{i}$  N

### ADIBIDE EBATZIA

- 4 Horizontalean inklinatuta dagoen planotik labaintzen den blokean (► 10.9. irudia).

- a) Identifikatu eta marraztu blokean eragiten duten indarrak.  
b) Bilatu ondoriozko indarra, blokea plano inklinatutik beherantz labaintzera behartzen duena.

- a) Pisu-indarra ( $\vec{P}$ ) blokeak Lurrekin duen el-karreraginaren ondoriozkoa da. Indar normala ( $\vec{N}$ ) blokeak plano inklinatuaren gainazalarekin duen interakzioaren ondoriozkoa da.

- b) Komeni da X ardatzaren norabidea blokearen higiduraren arabera hartzea; plano inklinatuaren paraleloa da hori, eta Y ardatza, berriz, X ardatzaren zuta.

Pisu-indarra deskonposatu egiten da, bi ardatzen gaineko proiektioetan:

$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y = m \cdot g \cdot \sin \alpha \vec{i} - m \cdot g \cdot \cos \alpha \vec{j}$$

Indar normalak Y ardatzaren gainean baino ez du osagaia:  $\vec{N} = N \vec{j}$

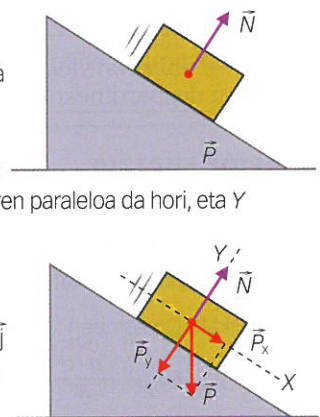
Ondoriozko indarra, blokea labaintzera behartzen duena, honako hau da:

$$\vec{F}_G = \vec{P} + \vec{N} = m \cdot g \cdot \sin \alpha \vec{i} + (N - m \cdot g \cdot \cos \alpha) \vec{j}$$

Blokea planoaren norabide paraleloan labaintzen da. Horregatik, ondoriozko indarren bigarren osagaiak nulua izan behar du ezinbestean.

$N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$ . betetzen bada baino ezin da lortu hori. Indarra:

$$\vec{F}_G = m \cdot g \cdot \sin \alpha \vec{i} = \vec{P}_x$$

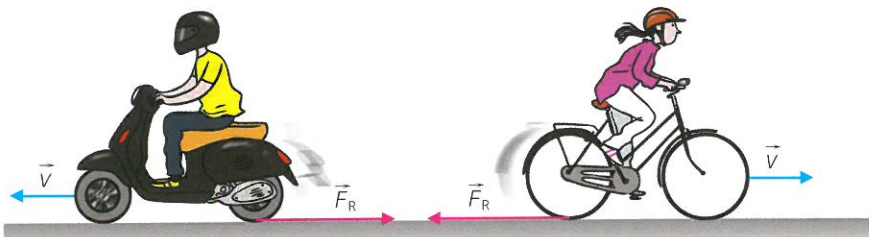


## 2.2. Marruskadura-indarrak

### Marruskadura

Dakigunez, gorputz bat higitzen ari denean, distantzia jakin bat egin ondoren, gelditu egiten da.

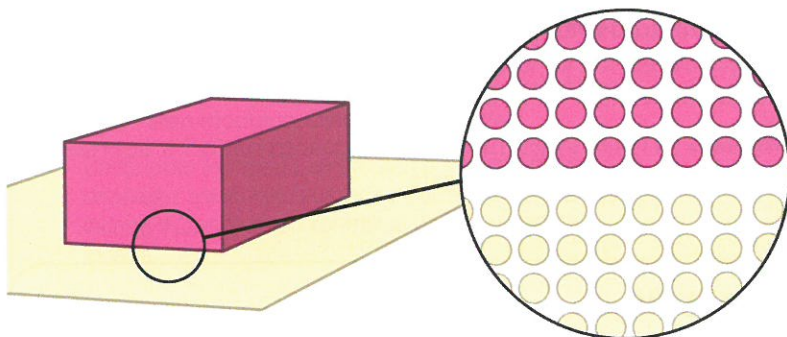
Gorputz bat zerbait estatikoa ukitzen duela higitzen denean, **higiduraren kontrako indar bat** dago beti; beste modu batean esanda, abiaduraren kontrako noranzkoa duen indar bat, **marruskadura-indarra** deritzoguna (► 10.10. irudia).



10.10. irudia. Marruskadura-indarra higiduraren kontra dago beti.

### Marruskadura-indarra elektromagnetikoa da

Atomoei gagozkiola, ukipenean dauden gorputzen gainazalean dauden atomoen edo molekulen arteko interakzio elektromagnetikoen bitartez uler daiteke marruskadura-indarra (► 10.11. irudia).



10.11. irudia. Marruskadura-indarra interakzio elektromagnetikoa da.

Interakzio elektromagnetikoaren propietate teorikoen bitartez marruskadura-indarren intentsitatea kalkulatzeko ezinezkoa denez gero, esperientziatik neurriak hartzen dira zuzenean. Horrela, marruskadura zer faktoreren mende dagoen eta nola diharduen zehazten da.

### Marruskadura likidoetan eta gasetan

Era berean, gorputz bat fluido likatsu batean higitzen denean ere marruskadura dago. Uretan edo airean erortzen den gorputz bat moteldu egiten da (uretan airean baino gehiago); horrela, ibilbide jakin bat egin eta gero, hutsean eroriko balitz izango lukeena baino abiadura txikiagoa du gorputz horrek.

Marruskadura-indarra aldakorra da; izan ere, gorputzaren abiaduraren arabera da (zenbat eta abiadura handiagoa, orduan eta marruskadura handiagoa); labaintzeagatik marruskadura-indarra, berriz, konstantea da.

## BA OTE DAKIZU?

### Marruskadura likatsua

Fluidoetako marruskadura-indarra abiaduraren balioaren arabera da: abiadura zenbat eta handiagoa, marruskadura ere orduan eta handiagoa; abiadura txiki samarretan, hori gertatzen da:

$$F_M = K \cdot \eta \cdot v$$

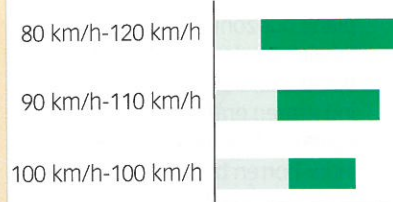
- $\eta$  da fluidoaren biskositate-koefizientea. Fluido biskosoenek erresistentzia handiagoa egiten diote higidurari.
- $K$  da objektuaren geometriaren arabera koefizientea.
- $v$  da abiaduraren modulua.

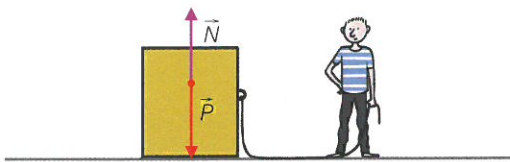
Abiadura handietan, marruskadura-indarra abiaduraren modulua karratuaren arabera da ( $F_M \propto v^2$ ). Ondorioz, erregai-kontsumoa asko igotzen da abiadura igotzean.

Erregai gehiago kontsumituko dugu ordubetik 80 km/h-ko abiaduraz gidatzen badugu eta hurrengo orduan 120 km/h-ko abiaduraz, bi ordu segidan 100 km/h-ko abiaduraz gidatzen badugu baino, nahiz eta bi kasuetan batez besteko abiadura berbera den: 100 km/h, hain zuzen.

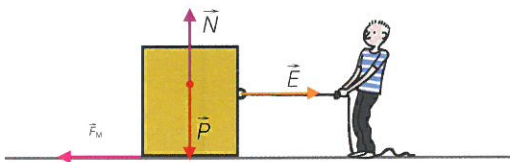
### Kontsumoa

1. ordua ■ 2. ordua.

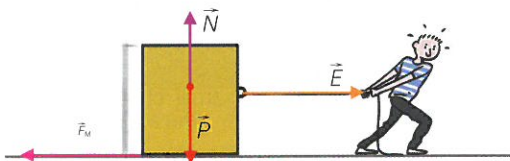




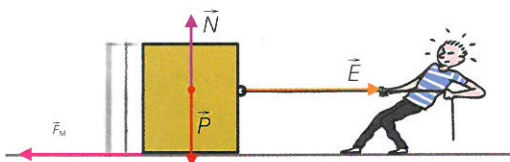
**10.12. irudia.** Geldi, eta indar eragilerik gabe, ez dago  $F_M$ -rik.



**10.13. irudia.** Geldi, eta indar eragilea  $\mu_e \cdot N$ -tik beherakoa izanik,  $F_M$ -k indar eragilea orekatzeko behar duen balioa hartzen du.



**10.14. irudia.** Higiduran eta  $\mu_z \cdot N$ -ren pareko indar eragile batekin,  $F_M$ -k indar eragilea orekatzen du, eta blokea abiadura konstantean higitzen da.



**10.15. irudia.** Higiduran, eta  $-\mu_z \cdot N$ -tik gorako indar eragilearekin,  $F_M$ -k ez du orekatzen indar eragilea, eta blokea azelerazio uniformean higitzen da.

### JARDUERA

- 8.** 2 kg-ko masa duen gorputz bat plano horizontal batetik labaintzen da 4 m/s-ko abiaduraz, eta marruskadura-indarraren eraginez, gelditu egiten da azkenean. Kalkulatu indar horren balioa, kontuan izanik 5 s geroago gelditzen dela.

**Emaitza:** 1,6 N

## Marruskadura-indar estatikoa

Gorputz batetik apurka-apurka tiratzean, aplikatutako marruskadura-indarraren gehieneko balioa berdintzen edo gainditzen duen arte, gorputz hori ez da desplazatzen. Ikus 10.12-10.15 figuren segida. Balio horretara iritsi baino lehen, **marruskadura-indar estatikoa** handiagotu egiten da, indar eragilea,  $\vec{E}$ , orekatu arte, eta gorputzari mugitzea galarazten dio. Ezaugarri hauek ditu:

- **Modulu aldakorra du**, indar eragilearen intentsitatea orekatzeko. Gehieneko balio bat du, ukipenean dauden bi gainazalen arteko indar normalaren moduluaren proportzionala (► 10.13. irudia).

$$F_M \leq \mu_e \cdot N$$

$\mu_e$  koefizienteari **marruskadura estatikoaren koefiziente** deritzo. Koefiziente zinetikoa baino handiagoa da koefiziente estatikoa ( $\mu_e > \mu_z$ ).

- **Indar eragilearen norabide bera eta kontrako noranzkoa** du. Horrenbestez, indar hori orekatzen du beti.

## Marruskadura-indar zinetikoa

Hona hemen marruskadura-indar zinetikoaren ezaugarri garrantzitsuenak:

- **Ez da gorputzen arteko ukipen-gainazalaren azaleraren araberakoa.** Hots, kaxa bat lurretik arrastatzean, ez du axola lurzorua ukitzen duen aldearen azalera zein den: marruskadura-indarra beti da bera.
- Ukipenean dauden bi gainazalen arteko **indar normalaren moduluaren proportzionala da marruskadura-indar zinetikoaren modulua.**

$$F_M = \mu_z \cdot N$$

$\mu_z$  koefizienteari **marruskadura zinetikoaren koefiziente** deritzo.

- Gorputzaren **abiaduraren norabide bera** du, eta **kontrako noranzkoa**. Beraz, higiduraren aurka dago beti, eta horregatik, higitzen ari den objektua galgatzten du (► 10.14. eta 10.15. irudiak).

**Indar normala** ( $\vec{N}$ ) Newtonen hirugarren legearen ondorioz agertzen da, aurreko epigrafean azaldu dugun bezala.

### ADIBIDE EBATZIA

- 5** Demagun 5 kg-ko masa duen gorputz bat lurzoru horizontal batean dagoela; marruskadura-koefizienteak:  $\mu_e = 0,5$ , eta  $\mu_z = 0,2$ . Gehieneko zer baliotara iritsi daiteke marruskadura-indarra?

Pisua honako hau da:

$$P = m \cdot g = 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 49 \text{ N}$$

Normalak balio hori orekatzen du:  $N = 49 \text{ N}$ .

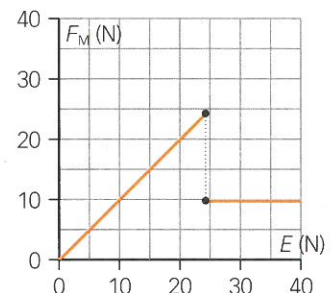
Objektua higitzen ez den bitartean, marruskadura-indarrak gehieneko balio hau hartuko du:

$$F_M = \mu_e \cdot N = 0,5 \cdot 49 \text{ N} = \mathbf{24,5 \text{ N}}$$

Marruskadura-indarrak, objektua higitzen bada, balio finko hau hartuko du:

$$F_M = \mu_z \cdot N = 0,2 \cdot 49 \text{ N} = \mathbf{9,8 \text{ N}}$$

Grafikoan ikus daiteke marruskadura-indarraren balioa nola aldatzen den indar eragilearen intentsitatearen arabera.



### Marruskadura gainazal horizontalean

Gorputz bat **gainazal horizontal** batetik desplazatzen denean, indar normalaren modulua gorputzaren pisuaren berdina da ( $N = m \cdot g$ ), Newtonen bigarren legeari jarraiki (indar bertikalei aplikatzen zaie, kasu honetan), gainazalaren zuta den higidurarik ez dagoenez, norabide horretako indarren batura zero baita.  $\vec{N}$ -k eta  $\vec{P}$ -k aurkako noranzkoak dituzte:

$$\vec{N} + \vec{P} = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P = m \cdot g$$

Eta horregatik, marruskadura-indarra hau da:

$$F_M = \mu_z \cdot N = \mu_z \cdot m \cdot g \quad (\blacktriangleright 10.16. \text{ irudia})$$

### Marruskadura plano inklinatuetan

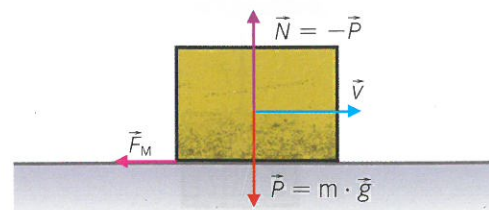
Gorputz bat  $\alpha$  angelua duen **plano inklinatu** batean desplazatzen bada, argudio bera erabil dezakegu. Planoaren zuta den norabidean higidurarik ez dagoenez, indar normalaren modulua norabide horretako pisuaren osagaiaren berdina dela ondoriozta dezakegu; hots:

$$\vec{N} + \vec{P}_y = 0 \Rightarrow N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y \Rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

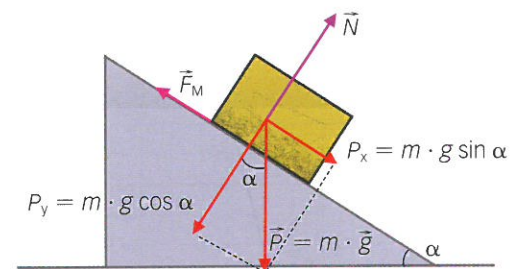
Kontuan hartuz horizontalarekin plano osatzen duen angelua dela  $\alpha$  ( $\blacktriangleright 10.17. \text{ irudia}$ ).

Kasu honetan, marruskadura-indarra honetara kalkulatzen da:

$$F_M = \mu_z \cdot N = \mu_z \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$



**10.16. irudia.** Norabide horizontalean indar bat baino ez dago,  $\vec{F}_M$ , eta  $\vec{v}$ -ren aurkakoa da.



**10.17. irudia.** Gorputz batean diharduten indarrak  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}_M$  eta  $\vec{N}$  dira.  $P_y$  eta  $P_x$  pisuaren osagaiak dira.

### ADIBIDE EBATZIAK

**6** Bloke bat ( $m = 1,5 \text{ kg}$ ) gainazal horizontal batean dago, eta marruskadura-koefiziente zinetikoa, kasu honetan,  $\mu_z = 0,2$  da. Blokeari indar batez ( $F$ ) bultzatzean,  $5 \text{ m/s}^2$ -ko azelerazioz higitzen da. Atera indarraren modulua. Datua:  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Ondoriozko indarra ( $R$ ), diharduten bi indarrekin atera dezakegu: eskatutako bultzada-indarra eta marruskadura-indarra ( $F_M$ ); indarraren kontrakoa da marruskadura-indarra.

$$R = F - F_M$$

Bakandu eskatutako indarra:

$$F = R + F_M$$

- Ondoriozko indarrak Newtonen 2. legea betetzen du:

$$R = m \cdot a$$

- Marruskadura-indarra:  $F_M = \mu_z \cdot N$ . Blokea gainazal horizontal batean dagoenez, normala pisuarekin orekatzen da, eta horrenbestez:

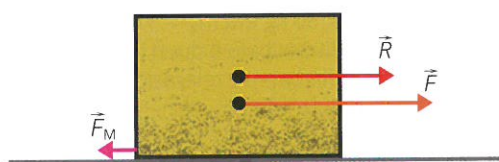
$$F_M = \mu_z \cdot m \cdot g$$

Ordeztu eskatutako indarraren adierazpenean, ordenatu adierazpena, eta eman balioak:

$$F = m \cdot a + \mu_z \cdot m \cdot g = m \cdot (a + \mu_z \cdot g)$$

$$F = 1,5 \text{ kg} \cdot (5 \text{ m/s}^2 + 0,2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2)$$

$$F = 10,44 \text{ N}$$



**7**  $40^\circ$ -ko plano inklinatu batetik,  $2 \text{ kg}$ -ko masa duen gorputz bat gorantz jaurtitzen dugu abiadura jakin batez. kalkulatu gorputza galgatzen duen azelerazioa, hau kontuan izanik:  $\mu_z = 0,2$ . Datua:  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Gorputzean bi indar hauek eragiten dute: batetik, pisuaren planoaren paraleloa den osagaiak ( $P_x$ ); eta marruskadura-indarrak ( $F_M$ ), igoeraren kontrakoa. Ondoriozko indarrak ( $R$ ), azkenik, gorputzaren igoeraren kontra dauden bi indarren batura da:

$$R = P_x + F_M = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{P_x + F_M}{m}$$

Kalkulatu  $P_x$  planoaren paraleloa den planoan:

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin 40^\circ = 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,6428 = 12,6 \text{ N}$$

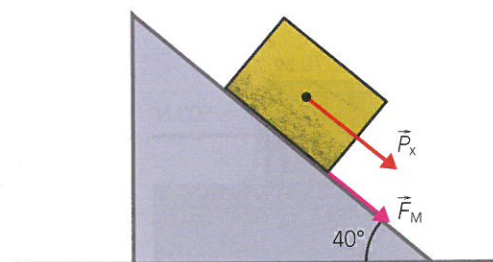
Kalkulatu marruskadura-indarra:

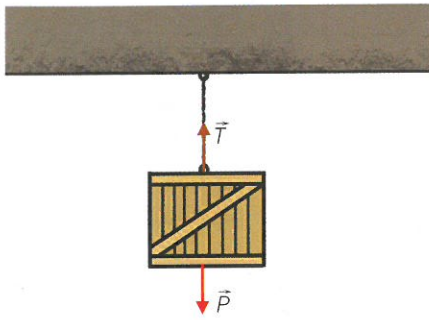
$$F_M = \mu_z \cdot N = \mu_z \cdot P_y = \mu_z \cdot m \cdot g \cdot \cos 40^\circ$$

$$F_M = 0,2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 0,7660 = 3,0 \text{ N}$$

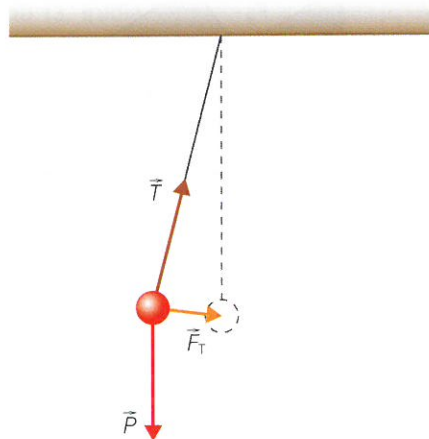
Ordeztu azelerazioaren formularen:

$$a = \frac{P_x + F_M}{m} = \frac{12,6 \text{ N} + 3,0 \text{ N}}{2 \text{ kg}} = 7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

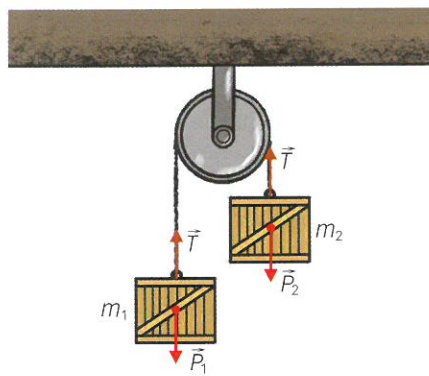




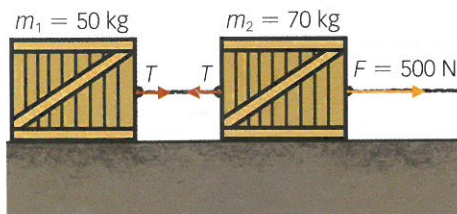
**10.18. irudia.** Tentsioa ( $\vec{T}$ ) eta pisua ( $\vec{P}$ ) orekatu egiten dira.



**10.19. irudia.** Pendulu simple batean, tentsioa ( $\vec{T}$ ) eta pisua ( $\vec{P}$ ) ez dira orekatzen.



**10.20. irudia.** Atwood-en makina.



**10.21. irudia.**

## 2.3. Tentsio-indarra

Askotan, tenkatutako soka, alanbre edo hari baten bitartez gertatzen da bi gorputzen arteko interakzioa. Sokaren barne-kohesioarekin zerikusia du indarraren jatorriak. Sinplifikatzeko, demagun soka ezin dela luzatu eta masa txiki-txikia duela.

**Tentsioa** ( $\vec{T}$ ) sokaren norabidean zuzendutako indarra da, eta haren noranzkoa gorputzetik aldentzen da.

Soka tenkatuta egongo da mutur bakoitzean gorputz bati lotuta badago.

Probleman diharduten gainerako indarrekin batu behar den indarra da tentsioa.

- Gorputz bat orekatzen duen beste indar bat izan daiteke, soka baten bitartez sabaitik esekitako kaxa baten adibidean ikus dezakegun bezala. Tentsioa eta pisua orekatu egiten dira,  $\Sigma \vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$  (► 10.18. irudia).
- Beste indar batzuekin elkartzean nulua ez den ondoriozkoa ematen duen indarra ere izan daiteke. Horrela, problemaren dinamikaren baldintzetan sartuta dago tentsioa,  $\Sigma \vec{F} = \vec{T} + \vec{P} = \vec{F}_r$  (► 10.19. irudia).

### ADIBIDE EBATZIA

- 8** 10.20. irudiari jarraituz lotutako gorputzek Atwooden makina bat osatzen dute. Kalkulatu bi masak askatzean horiek izango duten azelerazioa, kontuan hartuz polearen masa txiki-txikia dela.  $m_1 = 1 \text{ kg}$  eta  $m_2 = 0,5 \text{ kg}$ . Kalkulatu, halaber, sokaren tentsioa. Datua:  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

Tentsioa ( $T$ ) berbera da bi gorputzetarako. Arrazoizkoa da suposatzea erloju-orratzen kontrako noranzkoan biraraziko duela sistemak polea, hau kontuan izanik:  $m_1 > m_2$ . Problema honetan, noranzko hori positiboa izango da.

Dinamikaren bigarren legea aplikatzen da objektu bakoitzerako:  $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ . Higidura dimentsiobakarra izanik, ez du bektore-karaktererik:

- $m_1$ -en gainean:  $P_1 - T = m_1 \cdot a \Rightarrow m_1 \cdot g - T = m_1 \cdot a$
- $m_2$ -ren gainean:  $T - P_2 = m_2 \cdot a \Rightarrow T - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a$

Batu bi ekuazioak, atalez atal, eta sinplifikatu, kontuan hartuz bi masak azelerazio berdinez higitu behar dutela, soka ezin baita luzatu. Gainera, tentsioa berbera da soka osoan:

$$m_1 \cdot g - T + T - m_2 \cdot g = m_1 \cdot a + m_2 \cdot a$$

$$(m_1 - m_2) \cdot g = (m_1 + m_2) \cdot a$$

Bakandu eta egin eragiketak:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot g = \frac{1 \text{ kg} - 0,5 \text{ kg}}{1 \text{ kg} + 0,5 \text{ kg}} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 3,26 \text{ m/s}^2$$

Bigarren ekuaziotik bakandu, ordenatu eta egin eragiketak:

$$T = m_2 \cdot g + m_2 \cdot a = m_2 \cdot (g + a) = 0,5 \text{ kg} \cdot (9,8 \text{ m/s}^2 + 3,26 \text{ m/s}^2) = 6,53 \text{ N}$$

### JARDUERA

- 9.** Soka batez lotutako bi bloke ( $m_1 = 50 \text{ kg}$  eta  $m_2 = 70 \text{ kg}$ ), eskuinerantz arrastatzen dira  $F = 500 \text{ N}$  balioa duen indar baten bitartez (► 10.21. irudia). Zehaztu multzoaren azelerazioa eta sokaren tentsioa.

**Emaitza:**  $4,16 \text{ m/s}^2$ ;  $208,3 \text{ N}$