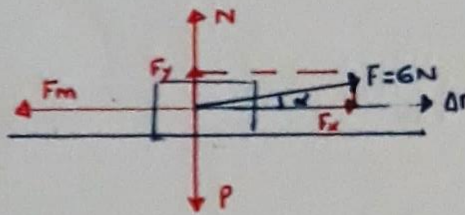
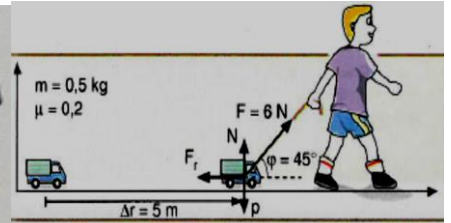


LANA ETA ENERGIA ARIKETAK ORRI (3) EBAZPENAK (1-5)

1.- Haur batek horizontalki desplazatu du 0,5 Kg-ko kamioitxo bat, horizontalarekin 45°-ko angelua osatzen duen soka baten laguntzaz, 5m-an zehar 6N-eko indar konstantea egin duela eta marruskadura-koefizientea 0,2 dela jakinda, kalkula itzazu kamioitxoan eragin duten indarrek eginiko lanak.



$\Delta r = 5\text{m}$
 $m = 0,5\text{kg}$
 $\mu = 0,2$
 $\alpha = 45^\circ$



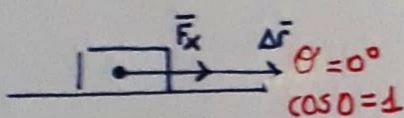
1.. Indar baten lana, W , kalkulatzeko ezagutu behar dugu

- Indarraren balioa
- Egindako desplazamendua
- Indarra eta desplazamenduaren arteko angelua.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$$

Horiegatik, beti bezala, gorputzaren gainean eragiten ari diren indarrak marraztu behar ditugu eta orain DESPLAZAMENDU BEKTORRA, $\vec{\Delta r}$, ere bai.

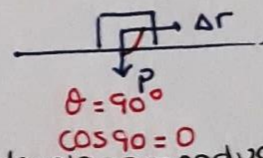
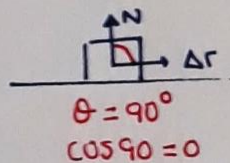
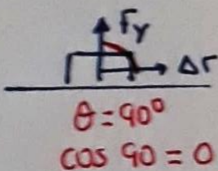
2.. Banan, banan indar bakoitzaren egindako lana kalkulatzeko dugu:



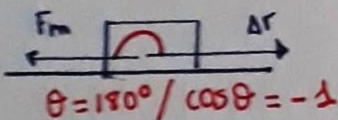
$$W_{F_x} = F_x \cdot \Delta r \cdot \cos 0 = F_x \cdot \Delta r = 4,24\text{N} \cdot 5\text{m} = \boxed{21,21\text{J}}$$

$$\hookrightarrow F_x = F \cdot \cos 45 = 6\text{N} \cdot \cos 45 = 4,24\text{N}$$

Lana positiboa da F_x , desplazamenduaren aldeko indarra delako.



Hiru kasu hauetan, indarrek ez dute lanik egiten desplazamenduari kiko perpendikularak direlako. $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = F \cdot \Delta r \cdot 0 = \underline{0\text{J}}$



$$\bullet F_m = \mu \cdot N = 0,2 \cdot 0,7\text{N} = 0,14\text{N}$$

$$\hookrightarrow F_{T_y} = 0$$

$$N + F_y - P = 0 \Rightarrow N = P - F_y = 4,9 - 4,2 = 0,7\text{N}$$

$$\bullet F_y = F \cdot \sin 45 = 6\text{N} \cdot \cos 45 = 4,2\text{N}$$

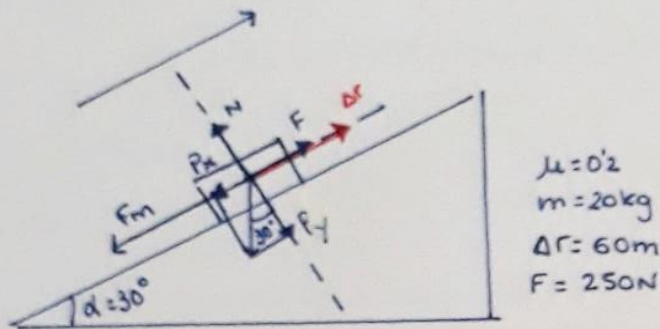
$$\bullet P = m \cdot g = 0,5\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 4,9\text{N}$$

$$W_{F_m} = F_m \cdot \Delta r \cdot \cos 180 = 0,14\text{N} \cdot 5\text{m} \cdot (-1) = \boxed{-0,7\text{J}}$$

Lana negatiboa da, marruskaduraren lana desplazamenduaren kontrakoa delako. Marruskaduraren lana egiten da trenatzeko ez aurratzeko.

2.- 20Kg-ko gorputz bat 60 m igo da, horizontalarekiko 30° -ko maldan duen plano inklinatu batean gora, planoarekiko paraleloa den 250N-eko indar konstantearen eraginez. Marruskadura-koefizientea 0,2 izanik, kalkula itzazu:

- Gorputzean eragin duten indar guztiek burutiko lanak.
- Indar erresultanteak eginiko lana



a) Indar bakoitzaren eginiko lana : $W = F \cdot \Delta r \cdot \cos \theta$

• Lehendabizi indar guztien balioa kalkulatuko dugu:

$$F = 250\text{N}$$

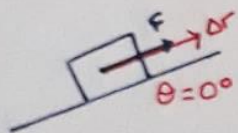
$$P_y = m \cdot g \cdot \cos 30 = 20\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \cos 30 = 169,7\text{N}$$

$$P_x = m \cdot g \cdot \sin 30 = 20\text{kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \sin 30 = 98\text{N}$$

$$N \Rightarrow F_{T_y} = 0 \Rightarrow N - P_y = 0 \Rightarrow N = P_y = 169,7\text{N}$$

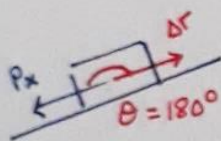
$$F_m = \mu \cdot N = 0,2 \cdot 169,7\text{N} = 33,9\text{N}$$

• Indarren lana :



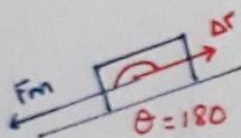
$$W_F = F \cdot \Delta r \cdot \cos 0 = 250\text{N} \cdot 60\text{m} \cdot (1) = 15000\text{J}$$

Lana positiboa da, indarrak desplazamenduaren alde jokatzen duelako.



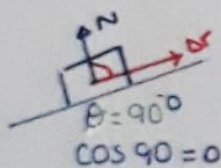
$$W_{P_x} = P_x \cdot \Delta r \cdot \cos 180 = 98\text{N} \cdot 60\text{m} \cdot (-1) = -5880\text{J}$$

Lana negatiboa da, indarrak desplazamenduaren kontra jokatzen duelako.



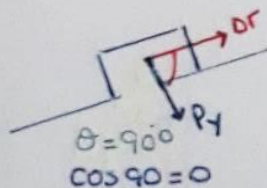
$$W_{F_m} = F_m \cdot \Delta r \cdot \cos 180 = 33,9\text{N} \cdot 60\text{m} \cdot (-1) = -2034\text{J}$$

Δurrekoaren bezalako azalpena.



$$\cos 90 = 0$$

eta



$$\cos 90 = 0$$

$$W_N = N \cdot \Delta r \cdot \cos 90 = 0\text{J}$$

$$W_{P_y} = P_y \cdot \Delta r \cdot \cos 90 = 0\text{J}$$

Neta P_y -k ez dute lanik egiten, higiduraren alde.

Lan totala, indar guztien lana izango da :

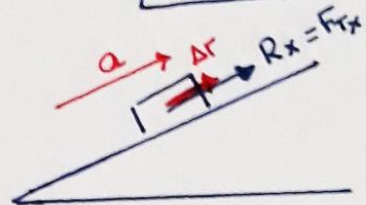
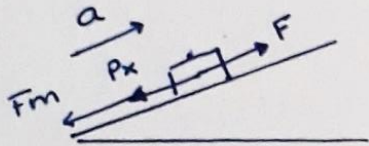
$$W_T = W_F + W_{P_x} + W_{F_m} + W_N + W_{P_y} = 15000\text{J} + (-5880\text{J}) + (-2034\text{J}) = \boxed{7086\text{J}}$$

Lan totala positiboa da, higiduraren aldekoa da.

b) Indar erresultantearen eginiko lana:

- Horretarako, lehendabizi, indar erresultantea kalkulatuko dugu, x ardatzean; eta kontuan hartuta gorantz mugitzen dela a .

$$F_{Tx} = R_x = F - P_x - F_m = 250\text{N} - 98\text{N} - 33,9\text{N} = \boxed{118,1\text{N}} \text{ Indar erresultantea}$$



Erresultantea positiboa da, beraz, azelerazioaren eta desplazamendua aldekoa. Ondorioz, erresultantearen eta desplazamenduaren arteko angelua $\theta = 0^\circ \rightarrow \cos 0 = 1$

$$W_{F_{Tx}} = \vec{F}_{Tx} \cdot \Delta\vec{r} = F_{Tx} \cdot \Delta r \cdot \cos \theta = 118,1\text{N} \cdot 60\text{m} \cdot \cos 0 = \boxed{7086\text{J}}$$

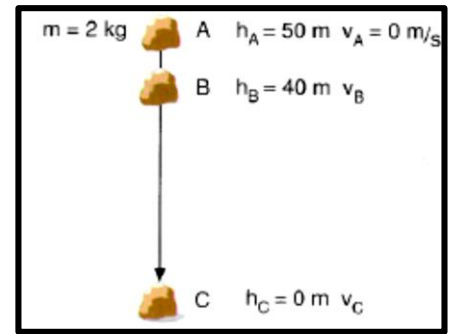
Lan totala positiboa da, desplazamenduaren aldekoa delako.

- Fijatu: a) apartaduan eta b) apartaduan, lortutako lan totala berdina da. Horregatik, propio ez badute eskatzen, guk aukeratuko dugu nola kalkulatu indar batzuen eginiko lana.

3.- 2kg-ko harri bat 50m-ko altueratik utzi da erortzen.

Kalkula itzazu:

- Lurretik 50m-ra zegoenean izan duen energia mekanikoa.
- Lurretik 40m-ra zegoenean izan duen abiadura.
- Lurrera iristean izan duen abiadura



a) $E_{m_A} = E_{z_A} + E_{p_A} \Rightarrow E_{m_A} = E_{p_A} = 980 \text{ J}$ Punturik altuenean energia mekanikoa bat egiten du energia potentzialarekin.

$E_{p_A} = mgh_A = 2 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 50 \text{ m} = 980 \text{ J}$

$E_{z_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = 0$

$v_A = 0$ erortzen utzi dugulako.

b) $h = 40 \text{ m}$ v_B ?

Mamuskadurarik ez dagoenez energia mekanikoa kontserbatzen da, ondorioz, $E_{m_A} = E_{m_B} = 980 \text{ J}$

$E_{m_B} = E_{z_B} + E_{p_B} \Rightarrow E_{z_B} = E_{m_B} - E_{p_B} = 980 \text{ J} - 784 \text{ J} = 196 \text{ J}$

$E_{p_B} = m \cdot g \cdot h = 2 \text{ kg} \cdot 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 40 \text{ m} = 784 \text{ J}$

$E_{z_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 \Rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2 E_{z_B}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 196}{2}} = 14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ Higikariaren abiadura lurretik 40 m-tara dagoenean.

c) v_C ? Lurrera iristean erreferentzia sisteman gaudenez altuera 0m izango da, mamuskadurarik ez dagoenez energia mekanikoa kontserbatzen da, beraz $E_{m_A} = E_{m_C} = 980 \text{ J}$

$E_{m_C} = E_{z_C} + E_{p_C} \Rightarrow E_{m_C} = E_{z_C} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_C^2 = 980$ Energia mekanikoa bat egiten du energia zinetikoarekin, energia potentziala 0 delako.

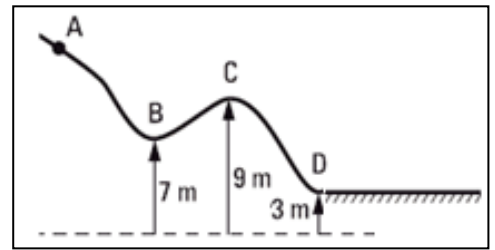
$E_{p_C} = m \cdot g \cdot h_C = 0 \text{ J}$

$v_C = \sqrt{\frac{2 \cdot 980}{2}} = 31.3 \text{ m/s}$ Higikariaren abiadura lurrera iristean. Erortzeko askea denez $v_C > v_B$

Jaistean E. zinetikoa handitzen doa ($v \uparrow$) energia potentziala txikitzen doalako ($h \downarrow$), eta horrela ibilbidearen puntu bakoitzean E. mekanikoa berdina da. Energia ez delako galtzen bilakatzen da eta.

4. -80 kg-ko eskiatzaile bat mendi baten magaletatik irristatzen da marruskadurarik gabe. A puntutik pasatzean 5 m/s eramatzen du eta 10 m/s C puntutik. Kalkulatu:

- Energia potentziala A puntuan.
- A puntuaren altuera
- Energia zinetikoa B puntuan.
- Abiadura D puntuan.



Marruskadurarik ez dagoenez energia mekanikoa kontserbatu egingo da. Ibilbidearen edozein puntutan berdina izango da: $F_m = 0 \Rightarrow \Delta E_m = 0 \Rightarrow E_{m_A} = E_{m_B} = E_{m_C} = E_{m_D}$.

a) E_{p_A} ? Energia potentziala kalkulatzeko $E_{p_A} = m \cdot g \cdot h_A$, baina altuera A puntuan ez dugu ezagutzen. Aprobetxatuko dugu E_m berdina dela puntu guztietan eta horrela, E_{m_A} ezagutzen badugu, V_A ezaguna denez E_{z_A} ere bai \Rightarrow

$$\rightarrow E_{m_A} = E_{z_A} + E_{p_A} \rightarrow E_{p_A} = E_{m_A} - E_{z_A} ; V_A = 5 \text{ m/s}$$

C puntuan V eta h ezagunak direnez, posiblea da kalkulatzea C puntuaren energia mekanikoa: $V_C = 10 \text{ m/s}$; $h_C = 9 \text{ m}$. *Ibilbidearen edozein puntuan E_m .*

$$E_{m_C} = E_{p_C} + E_{z_C} = 7200 \text{ J} + 4000 \text{ J} = 11.200 \text{ J}$$

$$\rightarrow E_{z_C} = \frac{1}{2} m v_C^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ kg} \cdot (10 \text{ m/s})^2 = 4000 \text{ J}$$

$$E_{p_C} = m \cdot g \cdot h_C = 80 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 \cdot 9 \text{ m} = 7200 \text{ J}$$

$$E_{m_C} = E_{m_A} = 11.200 \text{ J}$$

$$E_{z_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} \cdot 80 \text{ kg} \cdot (5 \text{ m/s})^2 = 1000 \text{ J}$$

$$E_{p_A} = E_{m_A} - E_{z_A} = 11.200 \text{ J} - 1000 \text{ J} = 10.200 \text{ J}$$

A puntuaren energia potentziala.

b) h_A ? $E_{p_A} = 10.200 \text{ J} \Rightarrow E_{p_A} = m \cdot g \cdot h_A$

$$h_A = \frac{E_{p_A}}{m \cdot g} = \frac{10.200 \text{ J}}{80 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2} = 12,75 \text{ m}$$

A puntuaren altuera lurgoritik.

c) E_{z_B} ? $h_B = 7 \text{ m}$ abiadura ez dugu ezagutzen aplikatzeko $E_{z_B} = \frac{1}{2} m v_B^2$ Beraz, berriz kontuan hartuko dugu $E_{m_C} = E_{m_B} = 11.200 \text{ J}$.

$$E_{m_B} = E_{p_B} + E_{z_B} \Rightarrow E_{z_B} = E_{m_B} - E_{p_B} = 11.200 \text{ J} - 5600 \text{ J} = 5600 \text{ J}$$

$$\rightarrow E_{p_B} = m \cdot g \cdot h_B = 80 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7 \text{ m} = 5600 \text{ J}$$

d) V_D ? $h_D = 3 \text{ m}$.

Puntu honetan E_z ez dugu ezagutzen, hortik V_D kalkulatzeko, ondorioz $E_{m_C} = E_{m_D}$ aprobetxatuz, $E_{m_D} = E_{z_D} + E_{p_D} \rightarrow E_{z_D} = E_{m_D} - E_{p_D}$

$$E_{z_D} = E_{m_D} - E_{p_D} = 11.200 \text{ J} - 2400 \text{ J} = 8800 \text{ J}$$

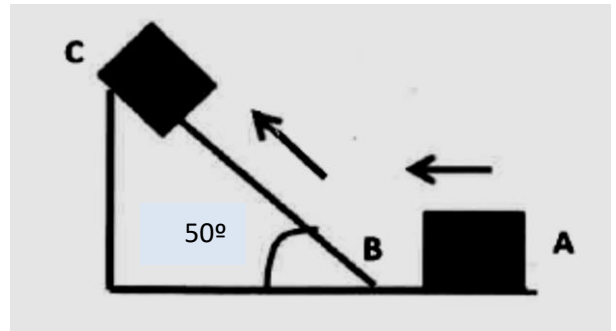
$$E_{m_C} = 11.200 \text{ J} \rightarrow E_{p_D} = m \cdot g \cdot h_D = 80 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ m} = 2400 \text{ J}$$

$$E_{z_D} = \frac{1}{2} m v_D^2 \rightarrow v_D = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{z_D}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8800}{80}} = 14,83 \text{ m/s}$$

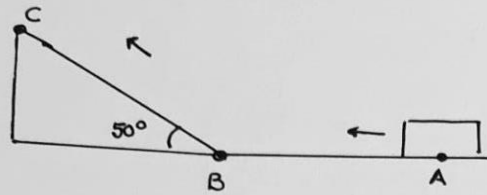
Higikariaren abiadura D-puntutik pasatzean.

5.- 73 kg-ko higikari bat mugitzen ari da 80 m-ko plano horizontal batetik 25m/s-ko abiadurarekin Eskatzen da:

- B puntuan duen abiadura gainazal honetatik marruskadura koefizientea 0,1 izanik.
- Zer distantzia egingo duen plano inklinatuan gelditu arte, kontuan hartuta, marruskadurarik gabe higitzen dela plano inklinatutik.



Hartu $g=10\text{m/s}^2$ kalkuluak egiteko



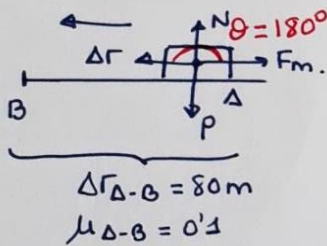
$$\begin{aligned}
 m &= 73 \text{ kg} \\
 \Delta r_{A-B} &= 80 \text{ m} \\
 v_A &= 25 \text{ m/s} \\
 \alpha &= 50^\circ \\
 \mu_{A-B} &= 0.1
 \end{aligned}$$

a) v_B ? A-B tartean, marruskadura koefizientea ematen dutenez marruskadura indarra kontuan hartu behar dugu. Ondorioz, ΔB tartean energia mekanikoa ez da kontserbatzen, ihesak daudelako bero eran, marruskadurarengatik.

$$W_{F_m} = \Delta E_{m_{A-B}} = E_{m_B} - E_{m_A} = E_{p_B} + E_{z_B} - (E_{p_A} + E_{z_A})$$

• B eta A puntuan Energia potentziala ez dago, lurrazua delako altueren emejerentzia sistema, beraz, 0 m.

$$W_{F_m} = E_{z_B} - E_{z_A} \rightarrow \text{Hemendik } E_{z_B} \text{ lortuko dugu eta hortik } v_B \text{ lehendabizi } W_{F_m} \text{ eta } E_{z_A} \text{ kalkulatu behar ditugu:}$$



$$W_{F_m} = \vec{F}_m \cdot \vec{\Delta r} = F_m \cdot \Delta r \cdot \cos \theta \Rightarrow$$

$$F_m = \mu \cdot N = 0.1 \cdot 730 \text{ N} = 73 \text{ N}$$

$$\rightarrow F_{T_y} = 0 \Rightarrow N - P = 0 \Rightarrow N = P = m \cdot g \Rightarrow$$

$$N = 73 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2 = 730 \text{ N}$$

$$W_{F_m} = 73 \text{ N} \cdot 80 \text{ m} \cdot \cos 180^\circ = -5840 \text{ J}$$

$$E_{z_A} = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} 73 \text{ kg} \cdot (25 \text{ m/s})^2 = 22812 \text{ J}$$

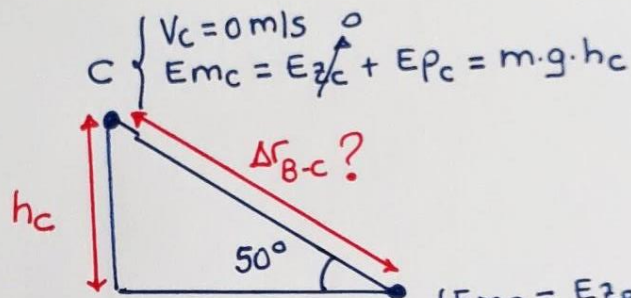
$$W_{F_m} = E_{z_B} - E_{z_A} \Rightarrow E_{z_B} = W_{F_m} + E_{z_A} = -5840 \text{ J} + 22812 \text{ J} \rightarrow$$

$$E_{z_B} = 16972 \text{ J} \quad E_{z_B} = \frac{1}{2} m v_B^2 \rightarrow v_B = \sqrt{\frac{2 E_{z_B}}{m}}$$

$$v_B = \sqrt{\frac{2 \cdot 16972}{73}} = 21.56 \text{ m/s}$$

Abiadura higikaria B-puntutik pasatzen denean.

b) d_{B-C} ?



$$\left. \begin{array}{l} E_{mB} = E_{zB} + E_{kB} = 16.972 \text{ J} \\ V_B = 21.56 \text{ m/s} \end{array} \right\}$$

• B-C tartean ez dago mamuskadurarik beraz, Energia mekanikoa kontserbatzen da: $E_{mB} = E_{mC}$.

• Δrazoa da E_m -an, altuerak jartzen ditugula E_p -an baina ez egindako distantzia. Baina, geometria aplikatzen badugu, triangelutik ikusten dugu:

$$\text{sen } 50 = \frac{h_c}{\Delta r_{B-C}} \Rightarrow \Delta r_{B-C} = \frac{h_c}{\text{sen } 50}$$

Ondorioz, Δr_{B-C} kalkulatu ahal izateko C-puntuaren altuera ezagutu behar dugu, eta hau, bai, energia mekanikoaren kontserbaziotik atera dezakegula:

$$E_{mB} = E_{mC} = E_{zC} + E_{pC} = mgh_c$$

$$\boxed{h_c} = \frac{E_{mC}}{m \cdot g} = \frac{16972 \text{ J}}{73 \text{ kg} \cdot 10 \text{ m/s}^2} \approx \boxed{23,25 \text{ m}}$$

$$\boxed{\Delta r_{B-C}} = \frac{h_c}{\text{sen } 50} = \frac{23,25 \text{ m}}{0,77} \approx \boxed{30,2 \text{ m}}$$

Higikariak egindako desplazamendua plano inklinatutik