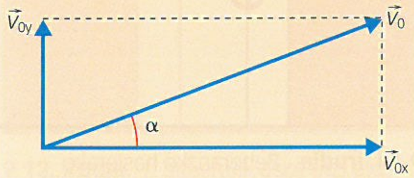
TRESNA MATEMATIKOAK

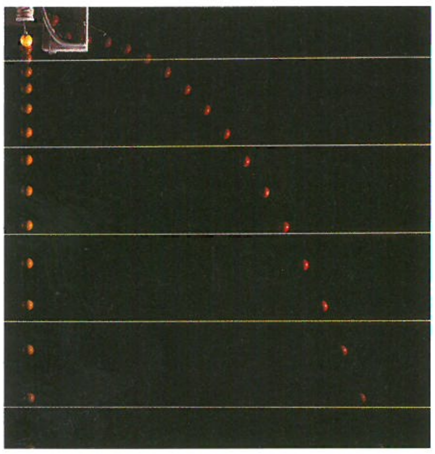
Hasierako abiaduraren osagaiak

Abiadurak horizontalarekin α angelua osatzen duenean:

$$v_{0x} = v_0 \cdot \cos\alpha$$
$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha$$



9.16. irudia. Abiadura-bektorearen osagaiak.



9.17. irudia. Ohartu bi erorketetan abiadura bertikala modu berean aldatzen dela.

3 Higidura parabolikoa

Higidura konposatu deritze higidura mota bat baino gehiago konbinatzen dituzten higidurei. Airera jaurtitako gorputz batek egiten duen kurba bi higiduraz osatutako higidura konposatu gisara aztertzen da, hala nola jaurtigai baten ibilbidea. Higidura horri **higidura paraboliko** deritzo.

Badira higidura parabolikoa baldintzatzen duten bi magnitude:

- **Hasierako abiadura.** Gorputz bat jaurtitzeko, ezinbestekoa da indarra egitea. Hasierako abiadura azelerazioaren arabera aldatzen da. Abiadura hori bi elementuk osatzen dute: **moduluak** eta **inklinazio-angeluak,** $\vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{i} + v_{0y}\,\vec{j}$ (▶ 9.16 irudia).
- **Grabitatearen azelerazioa.** Norabide bertikala eta beheranzko noranzkoa dituen bektore konstantea da: $\vec{a} = -g\,\vec{j}$.

Horrez gain, hau ere ikus dezakegu:

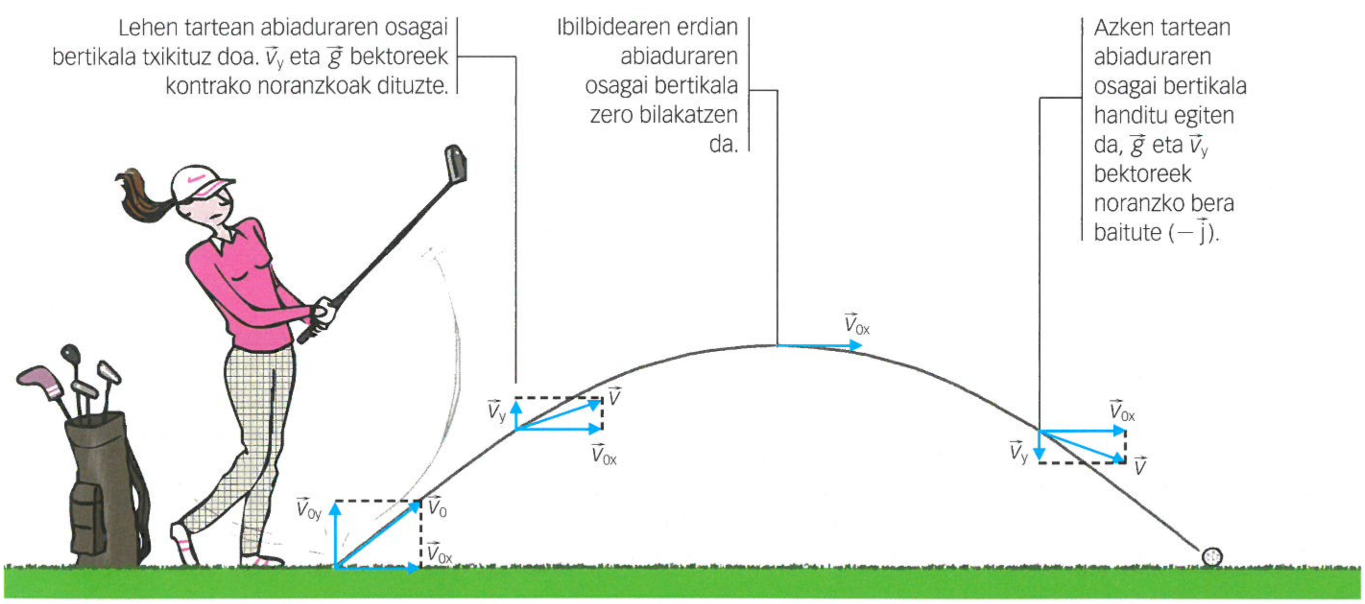
- X ardatzean ez dago azeleraziorik, beraz, higidura horizontalak abiadura konstantea du: hasierako abiaduraren osagai horizontala, $v_{0x}\,\vec{i}$.
- Y ardatzari grabitateak eragiten dio, beraz HZUA horretan $\vec{a} = -g\vec{j}$; esate baterako, grabitatearen eraginpeko jaurtiketa bat (▶ 9.17 irudia).

Higidura parabolikoak bitan bereiz daitezke:

- **HZU:** ekuazioen norabide horizontalean (X ardatza):
$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t$$
$$v_x = v_{0x} \text{ (kte.)}$$
- **HZUA:** ekuazioen norabide bertikalean (Y ardatza):
$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$
$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

Kontuan izan ez diogula erreparatuko airearen marruskadurari.

9.18. irudia. Abiadura-bektorearen deskonposizioa jaurtiketa paraboliko batean.



3.1. Jaurtiketa paraboliko bakuna

Hauek dira jaurtiketa paraboliko bakunaren baldintzak: hasierako altuera nulua, $y_0 = 0$; hasierako abiaduraren angelua positiboa izatea, $\alpha > 0$ edo $v_{0y} > 0$; eta amaierako altuera nulua, $y_{amaierakoa} = 0$. Erreferentzia-sistema hautatu behar dugu $x_0 = 0$ izan dadin. Airearekiko marruskadura ere baztergarritzat joko dugu.

Higiduraren ekuazioetan ordezkatzean:

	Osagai horizontala (HZU)	Osagai bertikala (HZUA)
Posizioa	$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$	$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Abiadura	$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$	$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$

Hegada-denbora

Jaurtigaia berriz ere lurrera iristen denean, posizioaren bigarren osagaian $y_{amaierakoa} = 0$ betetzen da (▸ 9.19. irudia). Ibilbidea egiteko zenbat denbora behar duen jakiteko, osagai bertikalaren posizioari dagokion ekuazioa hartu behar dugu abiapuntutzat. Bertan, denbora ordezkatu eta bakandu behar dugu:

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow 0 = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

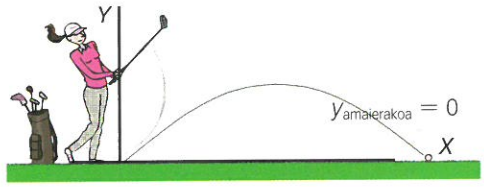
Bigarren mailako ekuazio bat da, ezezaguna t aldagaian duena:

$$0 = \left(v_0 \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t\right) \cdot t \quad \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = \dfrac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} \end{cases}$$

Lehenengo erantzuna hasierako uneari dagokio. Bat dator hasieran aipatutako baldintzetako batekin: hasierako altuera nuluarekin, $y_0 = 0$.

Bigarren erantzuna da bilatzen ari garena; hots, **hegada-denbora:**

$$\boldsymbol{t_{hegada} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g}}$$



9.19. irudia. Lurrera erortzen denean, $y_{amaierakoa} = 0$.

Irismen maximoa

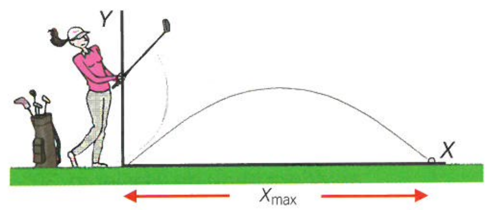
Irismen maximoa hegada amaitu bitartean jaurtigaiak egiten duen distantzia horizontala da, x_{max} (▸ 9.20. irudia). Kalkulatzeko, osagai horizontalaren posizioari dagokion ekuazioan hegada-denbora ordezkatu behar dugu:

$$x_{max} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t_{hegada} = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot \frac{2 \cdot v_0 \cdot \sin\alpha}{g} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g}$$

Horrela, **irismen maximoa** kalkulatzeko adierazpena lortuko dugu:

$$\boldsymbol{x_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g}}$$

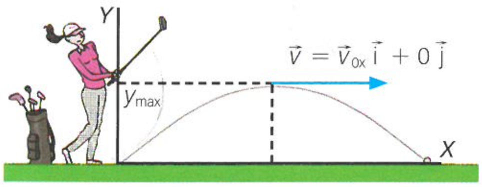
α angelua aldatuz gero, hainbat irismen lor ditzakegu hasierako abiadura berarentzat. Angeluak 45° baditu, abiadura berarentzat irismen maximo jakin bat lortuko dugu: $(2 \cdot 45°) = \sin 90° = 1$, sinuaren balio maximoa. Angelu osagarrien kasuan ere irismen bera lortzen da, honakoa gertatzen baita: $\sin 2\,(90° - \alpha) = \sin(180° - 2\alpha) = \sin 2\alpha$.



9.20. irudia. Irismen maximoa α angeluaren eta hasierako abiaduraren (v_0) araberakoa da.

Gogoratu

- Angelu bikoitzaren sinua:
  $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$
- Betegarrien arteko simetria:
  $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$



9.21. irudia. Altuera maximoa lortzen den puntuan, $v_y = 0$.

JARDUERAK

17. Futbol-jokalari batek baloia aterantz jaurti du 17 m/s-ko hasierako abiadurarekin eta 45°-ko horizontala duen jaurtiketa-angeluarekin. Kalkulatu:

a) Irismen eta altuera maximoak.

b) Hegada-denbora.

Emaitza: a) 29,5 m; 7,4 m; b) 2,45 s

18. Erantzun:

a) Zer abiadurarekin jaurti behar da futbol-baloi bat, horizontalarekiko 45°-ko angeluarekin jaurtitzen badugu, 100 m luze den zelai baten beste aldera irits dadin?

b) Futbol-baloia airean doanean, jaurtiketa-puntutik zenbateko distantzia horizontalera egongo da, lurretik 1,80 m-ra badago?

Emaitza: a) 31,30 m/s; b) 1,83 m eta 98,17 m

Altuera maximoa

Jaurtigaia punturik altuenera iristen denean $v_y = 0$ betetzen da (▸ 9.21. irudia). Abiaduraren osagai bertikalaren ekuazioan, abiadurak (v_y) nulua izateko behar izan duen denbora bakandu behar da:

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \;\Rightarrow\; 0 = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}$$

Balio hori *y*-aren posizioari dagokion ekuazioan ordezkatu behar dugu:

$$y_{max} = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{v_0 \cdot \sin\alpha}{g}\right)^2$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{g} - \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}$$

Sinplifikatzean, **altuera maximoaren** adierazpena lortuko dugu:

$$\mathbf{y_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g}}$$

Ikus dezakegun bezala, altuera maximoa bi faktoreren araberakoa da:

- Hasierako abiadura. Zenbat eta azkarrago irten, orduan eta altuera handiagoa.
- Jaurtiketa-angelua. Altuera maximoa jaurtiketa bertikalean, $\alpha = 90°$ denean, lortzen da. Kasu horretan, $\sin^2\alpha = 1$ izaten da.

Ibilbidearen ekuazioa

Lortutako ekuazioari esker, ibilbidea ardatz kartesiarren sistema batean adieraz dezakegu. *x*-ren ekuazioan *t* bakandu behar dugu:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t \;\Rightarrow\; t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}$$

Ondoren, *t* ordezkatu behar dugu osagai bertikalean:

$$y = v_0 \cdot \sin\alpha \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2$$

Sinplifikatu eta ordenan jartzean, **ibilbidearen ekuazioa** lortuko dugu:

$$\mathbf{y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2}$$

ADIBIDE EBATZIA

10 Baloi bat ostikatu eta jaurti egin dugu; 54 km/h-ko abiadura hartu du. Hasieran, 30°-ko angeluarekin abiatu da. Kalkulatu:

a) Irismen eta altuera maximoak.

b) Ibilbidearen ekuazioa.

c) Beste zein angelurekin lortuko dugu irismen bera?

$$54\,\frac{\cancel{km}}{\cancel{h}} \cdot \frac{1.000\text{ m}}{1\,\cancel{km}} \cdot \frac{1\,\cancel{h}}{3.600\text{ s}} = 15\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

a) Erabili bakoitzari dagozkion adierazpenak:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{15^2 \cdot \sin(2 \cdot 30°)}{9{,}8} = \mathbf{19{,}88\ m}$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin^2\alpha}{2 \cdot g} = \frac{15^2 \cdot \sin^2 30°}{2 \cdot 9{,}8} = \mathbf{2{,}87\ m}$$

b) Hartu ibilbidearen ekuazioari dagokion adierazpena, ordezkatu eta egin eragiketak:

$$y = \tan\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot x^2$$

$$y = \tan 30° \cdot x - \frac{9{,}8}{2 \cdot 15^2 \cdot \cos^2 30°} \cdot x^2$$

$$y = \mathbf{0{,}5774\,x - 0{,}0290\,x^2}$$

c) 30°-ren angelu osagarriarekin (hots, $90° - 30° =$ **60°**-ko angeluarekin), irismen bera lortuko dugu. Egiaztatu:

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2(90° - \alpha)}{g} = \frac{15^2 \cdot \sin(2 \cdot 60°)}{9{,}8}$$

$$x_{max} = 19{,}88\ m$$

3.2. Jaurtiketa parabolikoa, altuera jakin batetik

Hauek dira kasu horretarako jaurtiketa parabolikoaren baldintzak: $y_0 = h$; hasierako abiadurak edozein angelu izatea; $y_{amaierakoa} = 0$. Erreferentzia-sistema hautatu behar dugu $x_0 = 0$ izan dadin. Airearekiko marruskadura ere baztergarritzat joko dugu.

Higiduraren ekuazioetan ordezkatzean:

	Osagai horizontala (HZU)	Osagai bertikala (HZUA)
Posizioa	$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$	$y = h + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Abiadura	$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$	$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$

Jaurtiketa horizontala

Kasu horretan, hasierako abiaduraren angelua nulua da, $\alpha = 0$. Horrek ekuazioak sinplifikatzen ditu, $\sin 0° = 0$ eta $\cos 0° = 1$ baitira.

Posizioaren eta abiaduraren ekuazioak sinplifikatu egiten dira:

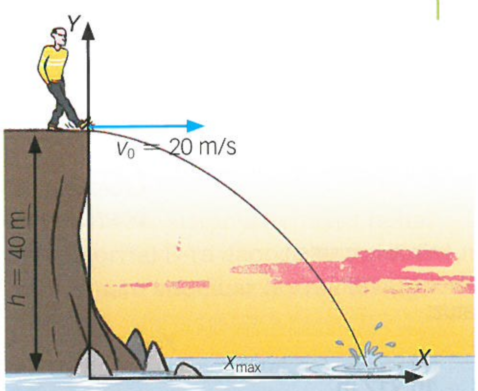
	Osagai horizontala (HZU)	Osagai bertikala (HZUA)
Posizioa	$x = v_0 \cdot t$	$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Abiadura	$v_x = v_0$	$v_y = -g \cdot t$

ADIBIDE EBATZIA

11 40 metroko altueran dagoen labar batetik harri bat jaurti dute horizontalki 20 m/s-ko abiadurarekin.

a) Zenbat denbora behar du erortzeko?

b) Labarraren oinetik zenbateko distantziara erori da?



a) Koordenatuen jatorria uraren mailan egongo da. Beraz, $y = 0$ m lurrera iristen denean. Horrez gain, badakigu:

$h = 40$ m

$v_x = 20$ m/s

Osagai bertikalaren ekuazioa bakantzen badugu:

$$y = h - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot (h - y)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (40\ \text{m} - 0\ \text{m})}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = \mathbf{2{,}86\ s}$$

Kontuan izan, kasu honetan, koordenatuen jatorria ez datorrela bat higikariaren hasierako posizioarekin. Koordenatuen jatorria posizio horren beheko puntu bat da, hain zuzen, uraren mailak ezartzen duena.

b) Zer distantziara erori den kalkulatzeko, kontuan izan osagai horizontalean higidura uniformea dela, hasierako abiadura 20 m/s-koa dela eta egindako distantzia x koordenatuak adierazten duela, $t = 2{,}86$ s unean:

$$x = v_{0x} \cdot t = 20\ \text{m/s} \cdot 2{,}86\ \text{s} = \mathbf{57{,}14\ m}$$

JARDUERAK

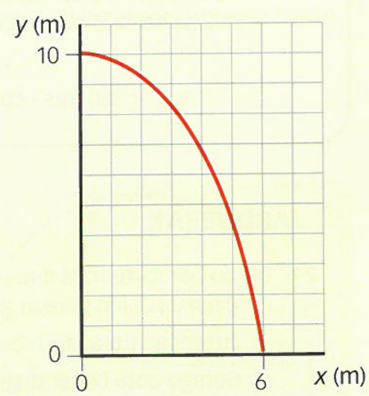
19. Mahai baten gainean 0,5 m/s-ko abiaduran biraka ari den bola bat ertzera iritsi eta lurrera erori da. Mahaiak 80 cm-ko altuera duela kontuan hartuta, kalkulatu:

a) Zenbat denbora behar izan duen lurrera iristeko.

b) Mahaiaren bertikaletik lurra ukitu duen punturaino bolak egindako distantzia horizontala.

Emaitza: a) 0,40 s; b) 0,20 m

20. Pilota bat jaurti dute horizontalki lurretik 10 metrora dagoen balkoi batetik, eta terrazaren bertikaletik 6 metrora erori da.



a) Zenbat denbora behar izan du lurrera iristeko?

b) Zer abiadurarekin jaurti dute pilota?

Emaitza: a) 1,43 s; b) 4,2 m/s

Gogoratu

Lehenengo koadranteko angeluetarako.

$\alpha > 0 \Rightarrow \sin\alpha > 0$

$\alpha < 0 \Rightarrow \sin\alpha < 0$

Kasu orokorra

Kasu horretan, hasierako abiaduraren angelua edozein izan daiteke, positibo zein negatibo, baina ezin du nulua izan, $\alpha \neq 0$. Kasurik orokorrena da, murrizketa bakarra duena: $x_0 = 0$. Hauek dira higiduraren ekuazioak:

	Osagai horizontala (HZU)	Osagai bertikala (HZUA)
Posizioa	$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$	$y = h + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$
Abiadura	$v_x = v_0 \cdot \cos\alpha$	$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$

ADIBIDE EBATZIA

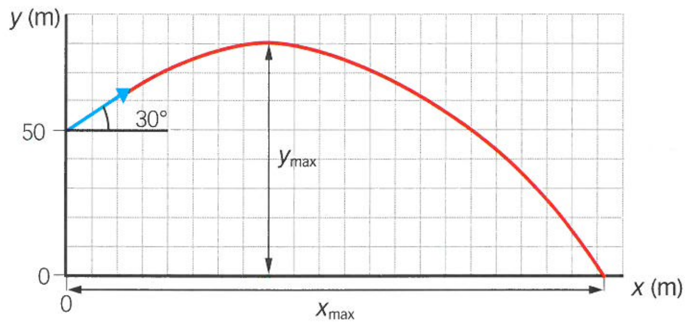
12 Jaurtigai bat bota dute 50 metroko altuera duen dorre batetik, horizontalarekin 30°-ko angelua osatuz. Jaurtiketa-abiadura 350 m/s da. Kalkulatu:

a) Zenbat denbora behar duen lurrera iristeko.

b) Irismen maximoa.

c) Altuera maximoa.

Datua: $g = 9{,}8$ m/s².



a) Lurrera iristeko zenbat denbora behar duen kalkulatzeko, y-aren ekuazioa behar dugu.

$$y = h + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\alpha = 350$ m/s $\cdot \sin 30° = 175$ m/s dela eta jaurtigaiak lurra ukitzen duenean $y = 0$ m dela kontuan hartuta, ordezkatu ekuazioan:

$$0\ \text{m} = 50\ \text{m} + 175\ \text{m/s} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot t^2$$

Ekuazioa ebaztean bi emaitza lortzen dira: $t_1 = -0{,}28$ s eta $t_2 = 36$ s. Kasu horretan, denboraren balio positiboak soilik du zentzua:

$$t = \mathbf{36\ s}$$

b) Denboraren balioa kalkulatu ondoren, kalkulatu irismen maximoa, x koordenatuaren adierazpenean lurrera iristeko behar duen denbora ordezkatuz:

$$x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t$$

$$x_{max} = 350\ \text{m/s} \cdot \cos 30° \cdot 36\ \text{s} = \mathbf{10.912\ m}$$

c) Abiaduraren osagai bertikala zero denean, altuera maximoa lortzen da; hau da, $v_y = 0$ denean.

$$v_y = v_0 \cdot \sin\alpha - g \cdot t$$

Kalkulatu zenbat denbora behar izan duen jaurtigaiak egoera horretara iristeko. Horretarako, bakandu denbora abiaduraren ekuazioan, eta ordezkatu balio ezagunak:

$$t = \frac{v_0 \cdot \sin\alpha - v_y}{g} = \frac{175\ \text{m/s} - 0\ \text{m/s}}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 17{,}86\ \text{s}$$

Ordezkatu balio hori ardatz bertikalari dagokion posizio-ekuazioan:

$$y = h + v_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$y_{max} = 50\ \text{m} + 175\ \text{m/s} \cdot 17{,}86\ \text{s} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (17{,}86\ \text{s})^2$$

$$y_{max} = \mathbf{1.613\ m}$$

JARDUERAK

21. Dardo bat sartu nahi dugu ituan. Jaurtiketa egitean, itua gure eskua baino gorago geratzen da.

a) Zuzenean itura jaurti behar al dugu dardoa?

b) Gorago bota behar dugu? Beherago? Zergatik?

22. 10 m-ra dagoen balkoi batetik pilota bat jaurti dute 18 km/h-ko abiadurarekin eta horizontalaren azpitik 15°-ko angeluarekin. Noiz eta non ukituko du lurra? Eta horizontalaren gainetik 15°-ko angeluarekin jaurtiz gero?

Emaitza: 1,3 s, 6,3 m; 1,6 s, 7,6 m

23. Saskibaloi-jokalari batek jaurtiketa libre bat egiten badu lurretik 2,20 m-ra eta horizontalarekin 30°-ko angeluarekin, zer abiadurarekin jaurti beharko du pilota jaurtiketa-puntutik uztaira 5 metroko distantzia horizontala dagoela eta uztaia lurretik 3,05 m-ra dagoela kontuan hartuta?

Emaitza: 8,96 m/s